

# **Ökonomische Entscheidungen bei Ungewißheit**

von Hans-Werner Sinn

J. C. B. Mohr (Paul Siebeck): Tübingen 1980

Kapitel 3: Die Struktur der Risikopräferenz

## Drittes Kapitel

# Die Struktur der Risikopräferenz

In den beiden vorangegangenen Kapiteln haben wir erfahren, wie im Unsicherheitsfall konsistente Entscheidungen zu treffen sind: Unter Verwendung (subjektiv gebildeter) äquivalenter objektiver Wahrscheinlichkeiten ist für eine jede Handlungsalternative der Erwartungsnutzen der Periodenendvermögensverteilung zu ermitteln und sodann jene Alternative mit dem höchsten Erwartungsnutzen zu wählen. Leider bleibt diese Empfehlung recht inhaltsleer, solange man über die Nutzenfunktion nur weiß, daß sie die persönlichen Präferenzen des Entscheidungsträgers widerspiegelt, diese Präferenzen selbst aber nicht kennt. In diesem Kapitel geht es daher um die Gestalt der Nutzenfunktion.

Im Teil A werden die Erkenntnisse der Psychophysik verarbeitet, und im Teil B werden einige simple Überlegungen zur Bewertung von Risiken, die zur Überschuldung des Entscheidungsträgers führen können, angestellt. Der Teil C beschäftigt sich schließlich mit einer rivalisierenden Präferenzhypothese Arrows.

Für die Analyse benötigen wir eine genauere Vorstellung vom Begriff des Vermögens als bisher. Wir fassen das Vermögen als Repräsentanten aller zukünftigen Konsummöglichkeiten des Entscheidungsträgers auf und unterstellen, daß diese Konsummöglichkeiten die Quelle des Vermögensnutzens repräsentieren. Als Vermögen definieren wir daher die Summe aus dem Marktwert der üblicherweise bilanzierten Vermögensteile und dem Humankapital. Das Humankapital ist der Gegenwartswert der zukünftigen Nettoarbeitseinkommen. „Netto“ soll hier nach klassischer Manier bedeuten, daß die Reproduktionskosten der Arbeit bereits abgezogen wurden, so wie wir es ja bei dem aus Sachkapital fließenden Einkommen für selbstverständlich halten. Entsprechend darf man unter den zukünftigen Konsummöglichkeiten, von denen die Rede war, auch nur einen Nettokonsum, also den Teil des Bruttokonsums verstehen, der das zur Erhaltung der Arbeitskraft notwendige Existenzminimum übersteigt. Wir wollen annehmen, daß der aus dem (zum Ende der Anfangsperiode verfügbaren) Vermögen  $V$  gespeiste

zukünftige Konsumstrom<sup>1</sup> proportional zu diesem Vermögen ist. Diese Annahme wird im nächsten Kapitel legitimiert, steht im übrigen aber auch im Einklang mit den monetaristischen Konsumhypothesen à la MODIGLIANI/BRUMBERG (1955) und FRIEDMAN (1957). Darüber hinaus unterstellen wir, daß der (Geld-)Wert des Konsums zu einem jeden Zeitpunkt als Mengenindex eines homogenen Konsumgüterbündels aufgefaßt werden kann. Diese Annahme ist eine Idealisierung, denn die Struktur des nachgefragten Warenkorbes ist sicherlich nicht unabhängig von seiner Größe. Die Idealisierung liegt ungefähr auf der Ebene, die man betritt, wenn das Sozialprodukt als Mengengröße interpretiert wird<sup>2</sup> und bezieht ihre Berechtigung daher, daß durch die Marktpreisbewertung heterogene Güter in einen einheitlichen Maßstab transformiert werden<sup>3</sup>.

## Abschnitt A

### Die Psychologie der Risikobewertung

#### 1. *Psychologische Relativitätsgesetze*

Der Schlüssel für die im nächsten Abschnitt zu erstellende Hypothese über die Gestalt der Risikonutzenfunktion liegt in einem fundamentalen psychologischen Relativitätsgesetz, dessen Ausprägung in Theorie und Realität wir jetzt untersuchen wollen.

##### 1.1. *Bernoullis Relativitätsgesetz*

AN BERNOULLIS (1738) *specimen theoriae novae de mensura sortis* findet man heute im allgemeinen nur noch den Vorschlag der Erwartungsnutzen-

---

<sup>1</sup> Wir unterstellen in diesem Kapitel noch, daß in der gegenwärtigen Periode, für die wir die Risikoprojektwahl untersuchen, kein Konsum stattfindet. Die Annahme wird im Kapitel IV B aufgehoben.

<sup>2</sup> Diese Interpretation ist in der öffentlichen Diskussion üblich und liegt auch sämtlichen makroökonomischen Ein-Sektor-Modellen zugrunde.

<sup>3</sup> Unsere Annahme kann auch durch die von STROTZ (1957, 1959) und GORMAN (1959a u. b) entwickelte Theorie des Nutzenbaumes erklärt werden. Nach dieser Theorie bestimmt ein Entscheidungsträger zunächst die optimale Aufteilung seines Budgets auf unterschiedliche Warenkörbe, die er als homogene Güter auffaßt, deren Preis der Preisindex der im Warenkorb vertretenen Einzelgüter ist. Erst anschließend werden die so gebildeten Subbudgets weiter aufgeteilt. Im Sinne dieser Theorie können wir in diesem Kapitel das Periodenendvermögen auch als Repräsentanten eines einzigen homogenen Warenkorbes auffassen, über dessen Struktur noch nicht nachgedacht wird. Bei der intertemporalen Optimierung im nächsten Kapitel gehen wir gemäß dieser Interpretation im Nutzenbaum eine Stufe höher und betrachten den Konsum in allen Perioden als in diesem Sinne homogen.

regel als solchen interessant, dessen Urheberschaft bekanntlich nicht einmal bei Bernoulli selbst, sondern bei CRAMER (1728) liegt. Bernoulli hat aber sehr viel Gewicht auf die spezielle Form einer logarithmischen Nutzenfunktion gelegt.

Seine Argumentation für diese Funktion ist von so verblüffender Originalität, daß man nur bedauern kann, daß sie außer einer anerkennenden Bemerkung von BORCH (1968a, S. 45) und der Feststellung von SAVAGE (1954, S. 94), "To this day, no other function has been suggested as a better prototype for Everyman's utility function.", in neuerer Zeit kaum mehr Beachtung gefunden hat. Noch um die Jahrhundertwende war das anders; damals sah man in der logarithmischen Funktion den „Kernpunkt“ der Abhandlung Bernoullis<sup>1</sup>. MARSHALL (1920, S. 111f.) neigte dieser Funktion mit einigen Einschränkungen zu, sie wurde im Rahmen der Opfertheorien der Besteuerung z.B. von SAX (1892, S. 76–79) diskutiert, und noch früher hatte sich LAPLACE (1814, S. XV) für sie eingesetzt.

Verfolgen wir daher einmal Bernoullis Argumentation. Nachdem zunächst eine Vermögensdefinition gegeben wird, die weitgehend im Einklang mit der unsrigen steht<sup>2</sup>, heißt es bei ihm (S. 30f.):

„Gesetzt nun aber, jemand hat ein Vermögen von 100 000 Dukaten, ein anderer ein solches von ebenso vielen halben Dukaten. Wenn dann der erstere hieraus ein jährliches Einkommen von 5000 Dukaten, der letztere wiederum ein solches von ebenso vielen halben Dukaten bezieht, so ist doch völlig klar, daß für den einen ein ganzer Dukaten gerade nur soviel bedeutet, wie für den anderen ein halber, und daß daher der Gewinn eines ganzen Dukaten für den ersten nicht mehr Wert hat, als der Gewinn eines halben Dukaten für den zweiten. Wenn also jeder von diesen beiden einen Gewinn von *einem* Dukaten macht, so wird dem zweiten daraus der *doppelte* Vorteil erwachsen, indem er ja *zwei* halbe Dukaten gewonnen hat.“

Mit diesen Sätzen wird ein psychologisches Relativitätsgesetz behauptet: Was für den reichen Mann der Gewinn eines Dukaten bedeutet, ist für den halb so reichen der Gewinn eines halben Dukaten, weil es aus subjektiver Sicht nur auf die *relative* Änderung des vorhandenen Vermögens ankommt.

Nach ihrer Anlage ist Bernoullis Argumentation offenbar nicht auf Vermögensänderungen von nur ein, zwei Dukaten beschränkt, sondern ist wohl allgemeiner gedacht: „Gleiche prozentuale Vermögensänderungen rufen gleiche Nutzenänderungen hervor.“ will er vermutlich sagen, also

$$(1) \quad \Delta U = f\left(\frac{\Delta v}{v}\right), \quad f'(\cdot) > 0, \quad f(0) = 0.$$

<sup>1</sup> So im Jahr 1896 der Herausgeber der deutschen Übersetzung, L. Fick, auf S. 8 seiner Einleitung zu „BERNOULLI (1738)“.

<sup>2</sup> Sogar das Problem des homogenen Konsumgüterstroms, der aus dem Vermögen gespeist wird, sieht Bernoulli. Vgl. sein Gefangenensbeispiel auf S. 27.

Der Bezug auf sehr kleine Vermögensänderungen hat allein den Zweck, eine Differentialgleichung, nämlich

$$(2) \quad dU = b \frac{dv}{v}, \quad b = \text{const.} > 0,$$

plausibel zu machen, denn hier kann statt des Funktionssymbols  $f(\cdot)$  ein konstanter Faktor  $b$  verwendet werden. Setzen wir die zweifache Differenzierbarkeit der Nutzenfunktion  $U(\cdot)$  und damit auch der Funktion  $f(\cdot)$  voraus, dann folgt (2) bei  $\Delta v/v \rightarrow 0$  tatsächlich aus (1) mit  $b = f'(0)$ . Die Integration von (2) bringt sofort Bernoullis Funktion  $U(v) = a + b \ln v$  oder wegen der Bedeutungslosigkeit linearer Transformationen<sup>3</sup>

$$(3) \quad U(v) = \ln v.$$

Hieraus folgt im Rückschritt, daß die in (1) geforderte Funktion  $f(\cdot)$  tatsächlich existiert und die gewünschten Eigenschaften auch für große Vermögensänderungen besitzt:

$$(4) \quad \begin{aligned} \Delta U &= f\left(\frac{\Delta v}{v}\right) = \ln(v + \Delta v) - \ln v \\ &= \ln\left(\frac{v + \Delta v}{v}\right). \end{aligned}$$

Berechnen wir nun einmal für Bernoullis Funktion die *Intensität der Versicherungsnachfrage*, die im Kap. II C 1.3 definiert wurde, dann erhalten wir nach Anwendung der Umkehrfunktion auf  $U[S(aq - C)] = E[U(aq - C)]$ , d.h. auf  $\ln[S(aq - C)] = E[\ln(aq - C)]$ , einen expliziten Ausdruck für das Sicherheitsäquivalent und somit für die Intensität der Versicherungsnachfrage

$$(5) \quad g = \frac{aq - \prod_{i=1}^n (aq - c_i)^{w_i}}{E(C)},$$

wobei  $c_i$  die  $i$ -te Ausprägung der Schadenvariable und  $w_i$  ihre Wahrscheinlichkeit angibt<sup>4</sup>. Wie man leicht sehen kann, ist  $g$  homogen vom Grade 0:

$$(6) \quad g\lambda^0 = \frac{\lambda aq - \prod_{i=1}^n (\lambda aq - \lambda c_i)^{w_i}}{E(\lambda C)}.$$

<sup>3</sup> Vgl. S. 79, Beziehung (2).

<sup>4</sup> Wegen (II C 14) und (II C 17) ist  $g = [aq - S(aq - C)]/E(C)$ , und aus  $\ln[S(aq - C)] = E[\ln(aq - C)]$  folgt  $S(aq - C) = \exp E[\ln(aq - C)] = \exp \sum_i w_i \ln(aq - c_i) = \prod_i (aq - c_i)^{w_i}$ .

So impliziert Bernoullis Relativitätsgesetz die interessante Aussage, daß eine bei unveränderten Wahrscheinlichkeiten vorgenommene Vergrößerung des Anfangsvermögens und der Schadensausprägungen um denselben Prozentsatz auch die Maximalprämie vom Standpunkt des Versicherungsnehmers um eben diesen Prozentsatz anwachsen läßt. Anschaulich kann man auch sagen, daß die Intensität der Nachfrage nach einer Vermögensversicherung von der Höhe des Vermögens unabhängig ist.

Dieses plausible Ergebnis des Bernoullischen Relativitätsgesetzes wurde in neuerer Zeit von PRATT (1964) und ARROW (1965) als *konstante relative Risikoaversion* klassifiziert und wäre wohl nur zu gerne akzeptiert worden, wäre Bernoullis Argumentation besser fundiert gewesen. Man bezweifelte aber, wie wir im Kap. II C 1.5 sahen, zu Recht, ob denn der sichere Vermögensnutzen mit dem Risikonutzen gleichgesetzt werden dürfe. Doch obwohl im wesentlichen nur dieser Teilschritt in Bernoullis Argumentation störte, wurde die gesamte Argumentation verworfen. Nichts ahnend hat man auf diese Weise das Kind mit dem Bade ausgeschüttet.

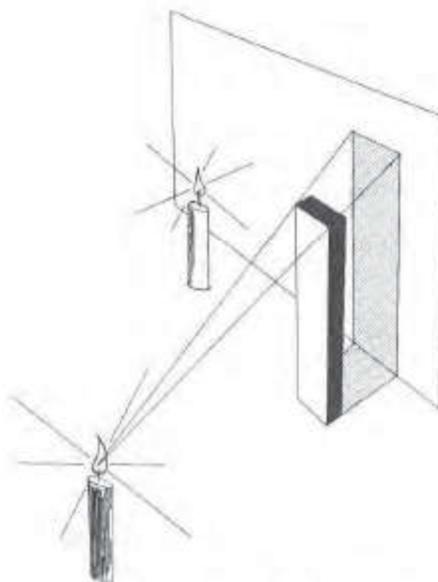
Um das einzusehen, wollen wir einen Abstecher in die Psychophysik unternehmen, denn dort sind ganz ähnliche Gedanken wie jene Bernoullis entwickelt worden. Die Psychophysik wird es erlauben, das verlässliche Fundament in Bernoullis Argumentation herauszufinden, so daß anschließend solider darauf gebaut werden kann.

### 1.2. Die Relativität der Reizschwellen

Wenn jemand leise flüstert, verstehen wir ihn häufig nicht, selbst wenn es im Raum ansonsten ganz still ist. Gibt es viele Nebengeräusche, dann verstehen wir ihn mitunter auch dann nicht, wenn er laut spricht. Selbst in einer klaren Neumondnacht nehmen wir mit bloßem Auge nur einen Teil jener Sterne wahr, die zu erkennen mit einem leistungsfähigen Teleskop ohne weiteres möglich ist. Am hellen Tag sehen wir fast gar keine Sterne, obwohl sie doch genau so hell scheinen wie in der Nacht. In allen diesen Fällen behindern Reizschwellen die Wahrnehmung. Im stillen Raum und in der Nacht handelt es sich um eine absolute Empfindlichkeitsgrenze unserer Sinne; man spricht daher von der *absoluten Schwelle*. Bei den lauten Nebengeräuschen und am hellichten Tag reicht die Intensität des jeweiligen Reizes nicht aus, um einen merklichen Unterschied zum jeweiligen Umgebungsreiz hervorzurufen; daher benutzt man den Terminus *Unterschiedsschwelle*.

Gerade die Unterschiedsschwelle ist sehr interessant. Beide Beispiele zeigen nämlich, daß man möglicherweise eine gegebene absolute Reizerhöhung eines in bestimmter Intensität vorgegebenen Ausgangsreizes nicht wahrnimmt, obzwar man die gleiche Erhöhung sehr wohl bemerken würde, erfolgte sie bei einer geringeren Intensität des Ausgangsreizes.

Diese Beziehung läßt sich noch exakter fassen. Bereits vor mehr als zweieinhalb Jahrhunderten führte BOUGUER (1760, S. 51–58) das folgende, in der Abb. 1 dargestellte Experiment durch. In einem dunklen Raum werden vor einer weißen Leinwand eine brennende Kerze und eine Schablone aufgestellt. Der Abstand beider Gegenstände zur Leinwand beträgt 1 Fuß. Dann wird eine zweite Kerze hinter der Schablone entzündet, so daß auf der Leinwand ein Schattenriß entsteht. Der Abstand dieser Kerze wird so lange variiert, bis der Schattenriß sich von seiner hellen Umgebung gerade nicht mehr abhebt. Bouguer fand einen kritischen Wert von 8 Fuß, der besagt, daß die Helligkeit eines Schattens von seiner Umgebung um mindestens  $1/64$  übertroffen werden muß, damit der Schatten bemerkt wird. FECHNER (1860 I, S. 147–151) hat dieses Experiment wiederholt und eine erstaunliche Konstanz der Relation  $1/64$  betont, die bei Bouguer nur angedeutet wird: Gleichgültig in welchem Leinwandabstand die erste Kerze aufgestellt wird, der kritische Abstand für die zweite Kerze ist immer gerade 8 mal so groß.



*Bouguers Experiment*

*Abbildung 1*

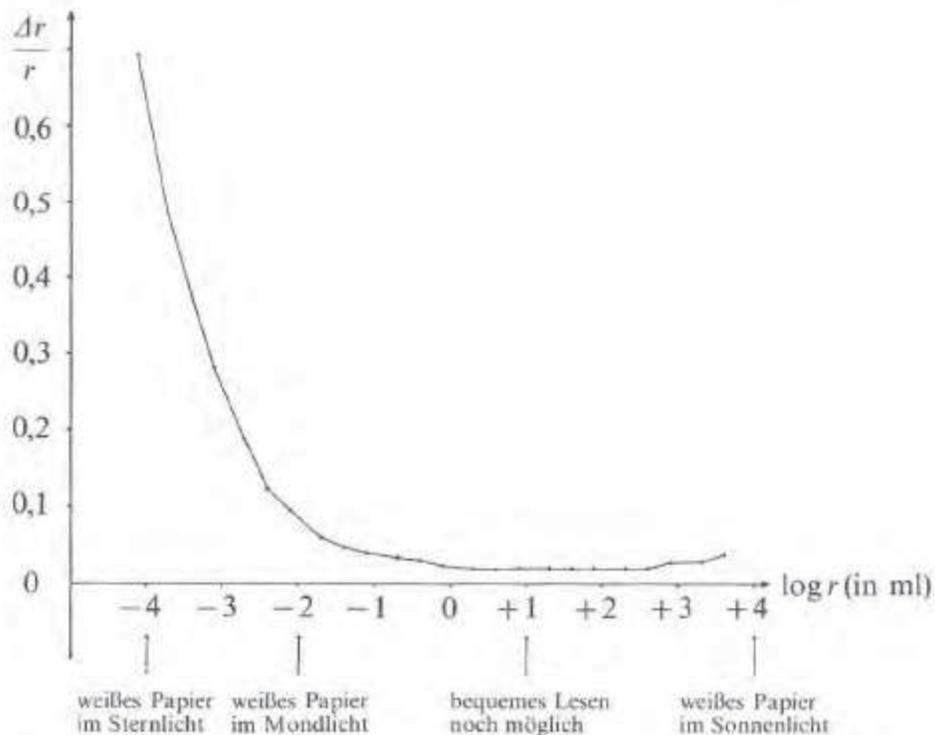
Bezeichnen wir die Reizintensität mit  $r$ , die Unterschiedsschwelle mit  $\Delta r$ , so folgt aus diesem Ergebnis

$$(7) \quad \Delta r = \alpha r, \quad \alpha = \text{const.},$$

und in Worten: *Die Unterschiedsschwelle macht einen festen Anteil des Ausgangsreizes aus.* Diesem allgemeinen Phänomen hat FECHNER (1860 I, S. 134–139) den Namen *Webersches Gesetz* gegeben.

Ernst Heinrich WEBER (1834, bes. S. 87–90, 171–175; 1846, bes. S. 89, 104–107, 134–139) war nämlich unabhängig von dem weitgehend unbekannt gebliebenen Bouguer bei seinen Messungen der Unterschiedsschwelle bei Gewichtsvergleichen zu einem materiell gleichen Ergebnis gelangt. Gilt es, von zwei Gewichten das schwerere herauszufinden, dann muß die Gewichts-differenz einen festen Prozentsatz des leichteren bzw. schwereren Gewichts übersteigen, damit der Unterschied merklich wird. Weber ermittelte für die menschliche Hand eine relative Schwelle von  $1/40$  in bezug auf das leichtere Gewicht. Dieser Wert konnte später in vielen nachfolgenden Experimenten bestätigt werden. Weber untersuchte auch noch die menschliche Fähigkeit, die größere von zwei nacheinander gezeigten Linien und die höhere von zwei nacheinander produzierten Tonfrequenzen festzustellen. Dabei ermittelte er relative Unterschiedsschwellen von  $1/100$  bzw.  $1/322$  für geübte Testpersonen.

Nach Weber sind vor allem von FECHNER (1860 I u. II)<sup>5</sup>, aber anschließend auch von vielen anderen Forschern weitere Reize untersucht worden<sup>6</sup>. Allen untersuchten Reizen ist gemeinsam, daß ihre Intensität über



Quelle: KÖNIG und BRODHUN (1889) (Ergebnisse für König) i. V. mit Angaben von HECHT (1934) und RIGGS (1971).

Abbildung 2

<sup>5</sup> Vor allem Helligkeit, Schall, Gewichte, Augenmaß, Tastmaß, Farbe.

<sup>6</sup> Z. B. KÖNIG und BRODHUN (1888, 1889; Helligkeit); VON BÉKÉSY (1930; Schall und Vibration); HOLWAY und PRATT (1936; Geschmack, Schall, Geruch, Helligkeit). Kürzlich konnte das Webersche Gesetz gar für den Vergleich (extrem) kurzer Zeitintervalle nachgewiesen werden: GETTY (1975).

eine Verhältnisskala meßbar ist. Andernfalls machte es ja auch keinen Sinn, nach einer konstanten relativen Unterschiedsschwelle zu suchen.

Es stellt sich nun die Frage, ob es die behauptete Konstanz der relativen Schwelle tatsächlich gibt, also die Frage nach der Verlässlichkeit des Weber'schen Gesetzes. Eine Zeitlang war es modern, das Gesetz zu bezweifeln. Der übliche Hinweis<sup>7</sup> bezog sich darauf, daß die relative Unterschiedsschwelle als Funktion des Grundreizes typischerweise durch eine Kurve, wie sie z. B. aus Daten von KÖNIG und BRODHUN (1889) ermittelt werden kann, darzustellen ist. An dieser Funktion zeigt sich, daß die relative Reizschwelle für kleine, gerade über der absoluten Schwelle liegenden Reizniveaus wie für Niveaus, die nahe einer oberen Grenze liegen, jenseits derer der Reiz das Rezeptionsorgan zerstören würde, größer als im mittleren Bereich ist. Für den Lichtreiz, auf den sich die Daten von König und Brodhun beziehen, kann jedermann dieser Abweichungen in seiner eigenen Erfahrung bestätigt sehen, wenn er daran denkt, daß bei extrem schwachem Licht, die Fähigkeit, Kontraste zu sehen, schwindet. Das Weber'sche Gesetz gilt also nicht uneingeschränkt. Sein Gültigkeitsbereich ist aber sehr viel größer als es bei oberflächlicher Betrachtung des Kurvenverlaufs den Anschein hat. Verläßt man nämlich die logarithmische Darstellung der Reizintensitäten, dann erscheint der horizontale Bereich der Kurve ganz enorm gestreckt, und der bloße Anschein verleiht dem Weber'schen Gesetz gleich sehr viel mehr Relevanz. Er trägt gar nicht einmal; denn, wie STEVENS (1951, S. 35) feststellt, werden mindestens im Bereich der Schall- und Lichtempfindungen 99,9% (!) des Bereichs der praktisch vorkommenden Reizintensitäten abgedeckt.

Natürlich gibt es noch weitere Probleme. So ist die Reizschwelle in Grenzen von einer Reihe psychologischer Faktoren wie Ermüdung, Übung, Stimmungslage und dergleichen abhängig, was sich, soweit man diese Beziehungen nicht in den Griff bekommt, als eine stochastische Verlagerung äußert<sup>8</sup>. An dem grundsätzlichen Phänomen der unter *gegebenen* Umständen konstanten relativen Reizschwelle ändern diese Probleme aber nichts.

### 1.3. Das psychophysische Gesetz

Die Beziehung zwischen Leib und Seele aufzudecken, betrachtete Gustav Theodor Fechner als sein Lebenswerk. Glücklicherweise konkretisierte er das reichlich metaphysisch klingende Problem auf die Frage nach der funktionalen Beziehung zwischen Reiz- und Empfindungsintensität, die Frage nach dem, was man *psychophysisches Gesetz* nennt. Damit ist Fechner der Begründer eines Wissenschaftszweiges, der gegen Ende des letzten

<sup>7</sup> Siehe z. B. BORING (1942, S. 138f.).

<sup>8</sup> Vgl. dazu die Begründung stochastischer Skalierungsverfahren durch die Arbeit von THURSTONE (1927).

Jahrhunderts in Deutschland eine große Bedeutung hatte und in den letzten zwanzig Jahren durch die Experimente von Stanley S. Stevens und seinen Mitarbeitern zur Hochblüte kam. FECHNERS (1860 I u. II) Werk *Elemente der Psychophysik* und die *Psychophysics* von STEVENS (1975) sind vermutlich Marksteine wissenschaftlicher Forschung, wie sie nur jahrhunderteweise gesetzt werden.

### 1.3.1. Das Fechnersche Gesetz

Fechner knüpft bei der Suche nach dem psychophysischen *Gesetz*

$$(8) \quad s = s(r),$$

wobei  $s$  die subjektive Intensität eines physikalischen Reizes der Stärke  $r$  mißt, an die Webersche Reizschwellentheorie an, die er ja selbst durch eine Vielzahl (von auch heute noch berühmten) Experimenten bestätigen konnte. Er behauptet, eine gerade merkliche Reizänderung führe unabhängig vom Niveau des Ausgangsreizes zu einer festen Empfindungsänderung. Daher könne man die Differenz zweier Empfindungen durch das Abzählen der zwischen ihnen liegenden gerade noch merklichen Zuwachsschritte messen. Da wir den festen Anteil der Reizschwelle am jeweiligen Vorniveau des Reizes  $\alpha$  genannt haben, gilt für zwei Reizstärken  $r$  und  $r^*$ ,  $r > r^*$ , zwischen denen es  $n$  Zuwachsschritte gibt<sup>9</sup>:

$$(9) \quad r = (1 + \alpha)^n r^*$$

Annahmegemäß bezeichnet dabei

$$(10) \quad n \equiv s(r) - s(r^*)$$

die bis auf eine Proportionalitätskonstante bestimmte Empfindungsdifferenz. Durch Logarithmierung errechnet sich aus (9) für diese Differenz:

$$(11) \quad s(r) - s(r^*) = \ln \left( \frac{r}{r^*} \right) \frac{1}{\ln(1 + \alpha)}.$$

Aus diesem Ausdruck folgt schon ein Ergebnis, das als *Fechnersches Gesetz* bezeichnet wird: *Gleiche relative Reizänderungen rufen gleiche absolute*

<sup>9</sup> Vgl. FECHNER (1860 II, S. 9–29). Wir folgen hier nicht Fechners Darstellung. Die von ihm vorgenommene Integration seiner „Fundamentalformel“  $dG = bdr/r$ , die jener Bernoullis (vgl. Gleichung (2)) entspricht, ist als Approximation zu verstehen, da Reizschwellen nicht infinitesimal klein sein können. Die Approximation ist prinzipiell zulässig, doch an dieser Stelle vermeidbar.

Empfindungsänderungen hervor. Setzt man nun  $r^* = \text{const.}$ , so hat man mit

$$(12) \quad s(r) = \alpha + \beta \ln r, \beta > 0,$$

die gesuchte Beziehung zwischen Reiz und Empfindung ermittelt<sup>10</sup>.

(12) und die zu ihr hinführende Argumentation zeigt interessanterweise sehr viel Ähnlichkeit mit Bernoullis Theorie. Dessen war sich FECHNER (1860 I, bes. S. 236–238) bewußt. Er betonte sogar die Eignung seiner Formel für die Nutzenbewertung des Vermögens mit dem Argument, daß das Vermögen Mittel zur Erzeugung „werthvoller Empfindungen“ sei, insofern also die Stelle des Reizes einnehme.

Das Fechnersche Gesetz hat viel Kritik hervorgerufen, denn Fechners Grundannahme, daß alle gerade noch merklichen Reizzuwächse als subjektiv gleich erscheinen, wurde von ihm in keiner Weise belegt. So folgt sein Gesetz *nicht* automatisch aus dem Weberschen Gesetz, und es ist verständlich, daß es lange Zeit nicht akzeptiert wurde.

### 1.3.2. Das Stevenssche Gesetz

Stevens ist einer der exponiertesten Kritiker Fechners. Er glaubt, nach dem umfangreichsten der experimentellen Forschungswerke über Skalierungsprobleme, die bislang durchgeführt wurden, zu einer Ablösung des logarithmischen durch ein Potenzgesetz gekommen zu sein<sup>11</sup>. Die von ihm rein induktiv gefundene, bis auf einen Proportionalitätsfaktor  $\kappa$  festgelegte<sup>12</sup> Empfindungsfunktion lautet

$$(13) \quad s(r) = \kappa r^\Theta; \kappa, \Theta > 0.$$

Sie kann wegen

$$(14) \quad \ln s = \ln \kappa + \Theta \ln r$$

<sup>10</sup> Als Besonderheit verdient es erwähnt zu werden, daß wegen der Ganzzahligkeit von  $n$  in (11)  $s(r)$  nur für eine diskrete Skala mit festen Empfindungsintervallen als Einheit definiert ist. So hat es den Anschein, daß unsere Sinne die Umwelt auf eine diskrete Empfindungsskala abbilden. Die Analogie zum Digitalrechner dürfte auf der Hand liegen. Von daher ergibt sich eine mögliche Erklärung der Reizschwellen als solcher: Reizschwellen bedeuten einen Genauigkeitsverzicht bei der Kontrolle der Umwelt, der evolutorisch wegen des Vorteils einer Einsparung von kostbaren Rechenkapazitäten des Gehirns durchsetzbar war. Vgl. dazu die Diskussion des Ordnungssaxioms (Kap. I 1.1) im Zusammenhang mit Reizschwellen.

<sup>11</sup> Siehe besonders STEVENS (1956, 1959, 1961, 1962, 1966, 1975). Die 1975 veröffentlichte Übersicht über das Gesamtwerk vollendete Stevens kurz vor seinem Tod.

<sup>12</sup> Der Proportionalitätsfaktor hat keine Bedeutung, weil eine Änderung der Einheit, in der  $r$  gemessen wird, als eine Änderung des Faktors aufgefaßt werden kann:

$$\kappa'(r\lambda)^\Theta = \kappa r^\Theta \quad \text{mit} \quad \kappa \equiv \kappa' \lambda^\Theta.$$

als Gerade in einem  $\ln s$ - $\ln r$ -Diagramm abgebildet werden. Mit der Exponentialfunktion haben wir nun ein weiteres psychologisches Relativitätsgesetz. Da für den Vergleich zweier Reizintensitäten  $r$  und  $r^*$  die Beziehung

$$(15) \quad \frac{s(r)}{s(r^*)} = \left( \frac{r}{r^*} \right)^\Theta$$

besteht, kann als *Stevenssches Gesetz* in einer dem Fechnerschen Gesetz analogen Weise formuliert werden<sup>13</sup>: *Gleiche Reizrelationen rufen gleiche Empfindungsrelationen hervor.*

Das Stevenssche Gesetz war u. a. von GUILFORD (1932), MEINONG (1896), FULLERTON und CATTEL (1892)<sup>14</sup>, zuerst aber von PLATEAU (1872) aus einer Modifikation des Weberschen Gesetzes abgeleitet worden<sup>15</sup> und fand mit der von diesen Autoren gelieferten Begründung wenig Anklang.

Stevens möchte seine Empfindungsfunktion daher unabhängig vom Weberschen Gesetz, das er für unbestreitbar hält, gesehen wissen. Bei seinen Experimenten wird denn auch nicht nach Reizschwellen gefragt, um über deren Summation auf indirektem Wege zu einem Empfindungsmaß zu gelangen. Statt dessen werden die Versuchspersonen gebeten, die Stärke ihnen abwechselnd dargebotener Reize durch (beliebig zu wählende) Maßzahlen zu kennzeichnen. Diese direkte Methode der Empfindungsmessung wird *Number-Matching* genannt.

Wer in der Tradition von Pareto, Hicks und Allen glaubt, die Menschen würden nur ein „besser oder schlechter“, ein „größer oder kleiner“ und ein „mehr oder weniger“ kennen, muß sich darüber wundern, daß die Versuchspersonen mit dieser Bitte überhaupt etwas anfangen konnten. Fest steht aber, daß sie es konnten. Dabei urteilten sie nicht etwa blindlings, sondern in einer Weise, die durch das Stevenssche Gesetz beschrieben wird. Die Tab. I gibt einige der von Stevens nach der Methode des Number-Matching gemessenen Exponenten an.

<sup>13</sup> STEVENS (1975, S. 16). Diese Formulierung wurde bereits während der Diskussion des Fechnerschen Gesetzes am Ende des letzten Jahrhunderts benutzt. Vgl. FECHNER (1888, S. 174–179).

<sup>14</sup> Zitiert nach GUILFORD (1932, S. 40f.).

<sup>15</sup> FECHNER (1877, S. 10ff. und S. 21) hat den Unterschied zwischen dem Logarithmus- und dem Potenzgesetz durch eine Unterscheidung der Gleichungen  $ds = \beta dr/r$  und  $ds/s = \Theta dr/r$  klargemacht. Eine vergleichende Diskussion beider Ansätze findet man bei GROFENFELT (1888, S. 15–20), WUNDT (1908, S. 638–645) und MEINONG (1896, S. 380–388).

Tabelle 1  
Die Größenschätzung ausgewählter Reize\*  
(Gemessener Exponent in  $s = \kappa r^{\Theta}$ )

Lautstärke (Schalldruck eines Tons von 3000 Hz)	0,67
Vibration 250 HZ	0,6
Vibration 60 Hz	0,95
Helligkeit	0,5
Länge einer Linie	1,0
Größe einer Fläche	0,7
Sättigung einer rotgrauen Farbmischung	1,7
Salzkonzentration	1,4
Muskelkraft (statisch)	1,7
Schwere eines Gewichts	1,45
Elektrischer Strom	3,5
Lautstärke der eigenen Stimme	1,1

\* Quelle: STEVENS (1975, S. 15).

Wie verlässlich die Stevensschen Meßergebnisse sind, zeigt sich an einer von STEVENS (1959, 1961 und 1966) vorgeführten Modifikation der Testverfahren, die *Cross-Modality-Matching* genannt wird<sup>16</sup>. Nach dieser Methode soll die Versuchsperson unterschiedlichen Intensitäten eines Reizes nicht eine Zahl, sondern die Intensität eines frei manipulierbaren anderen Reizes zuordnen, so daß beide Reize als gleich intensiv erscheinen. Für die beiden Empfindungsfunktionen  $s_1 = \kappa_1 r_1^{\Theta_1}$  und  $s_2 = \kappa_2 r_2^{\Theta_2}$  verlangt man also von der Versuchsperson,  $r_1$  für vorgegebene  $r_2$  so anzupassen, daß

$$(16) \quad s_1 = s_2.$$

Wegen

$$(17) \quad \kappa_1 r_1^{\Theta_1} = \kappa_2 r_2^{\Theta_2}$$

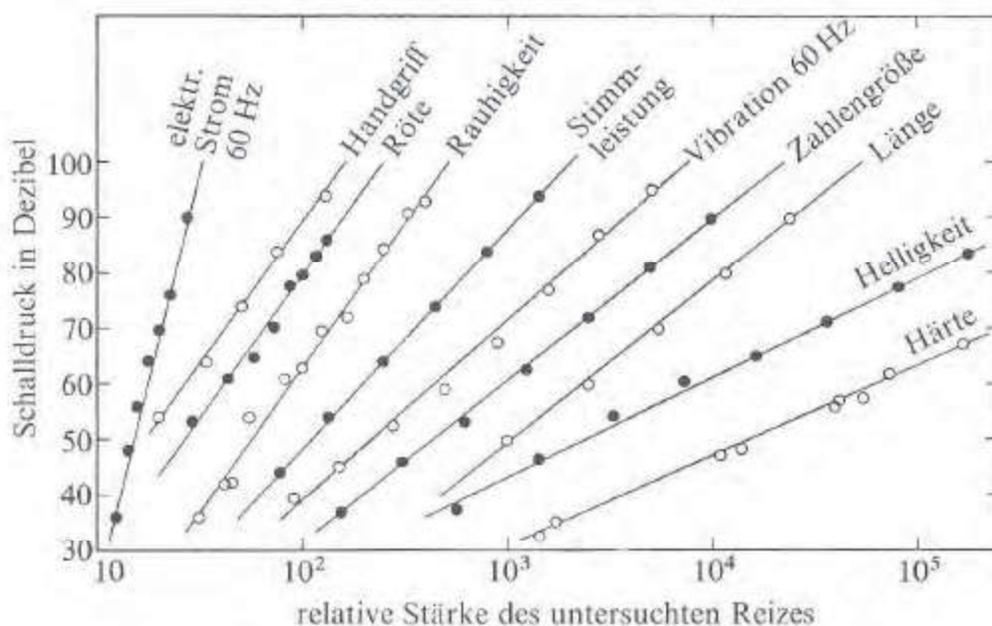
und somit

$$(18) \quad \ln r_1 = \frac{\ln \kappa_2 - \ln \kappa_1}{\Theta_1} + \frac{\Theta_2}{\Theta_1} \ln r_2$$

müßte sich daher eine Gerade in einem  $\ln r_1$ - $\ln r_2$ -Diagramm ergeben, wenn das Stevenssche Gesetz stimmt. Darüber hinaus müßte die Steigung

<sup>16</sup> Vgl. STEVENS (1975, S. 109-111). Die Methode wurde übrigens bereits von BÉKÉSY (1930, S. 346-348) auf den Vergleich zwischen Vibrations- und Lautstärke angewendet. Békésy fand den Wert  $\Theta_1/\Theta_2 = 1$ , was in etwa durch die Tab. 1 bestätigt wird.

der Geraden dem Quotienten  $\Theta_2/\Theta_1$  der Steigungen, die beim Number-Matching gefunden wurden, entsprechen. Beides ist in erstaunlich hohem Maße der Fall<sup>17</sup>. Als Beispiel für das Ergebnis einer Cross-Modality-Studie führen wir die von Stevens übernommene Abb. 3 an. Dort fungiert die Lautstärke als Reiz  $r_1$  und die anderen angegebenen Reize alternativ als  $r_2$ . Die Geraden der Abb. 3 wurden wegen der Bedeutungslosigkeit der Absolutglieder willkürlich angeordnet, doch ihre Steigungen reflektieren die Meßergebnisse.



Quelle: STEVENS (1966).

Abbildung 3

Da für alle Reize  $r_2$  auch Number-Matching-Exponenten bekannt sind, können über alle an Hand der Abb. 3 ermittelten Steigungen  $\Theta^*$  Schätzwerte  $\hat{\Theta}_1 = \Theta_2/\Theta^*$  für den Lautstärkeexponenten bestimmt werden. Stevens errechnet ein geometrisches Mittel von 0,67. Das ist gerade der Wert, der für die Lautstärkeempfindung beim Number-Matching gefunden wurde<sup>18</sup>. Vermutlich ist bei dieser erstaunlichen Exaktheit auch Zufall im Spiel. Doch gelingt es STEVENS (1975, S. 113 u. 117), eine Reihe von weiteren Cross-Modality-Experimenten zu zitieren, die zu einem weitgehend konsistenten Gebäude von Exponentenrelationen führen. Für eine sozialwissenschaftliche Theorie ist das Ergebnis von beispielhafter Genauigkeit.

<sup>17</sup> Siehe STEVENS (1975, S. 99–133).

<sup>18</sup> STEVENS (1975, S. 119) zitiert eine dem Verf. unzugängliche noch umfangreichere Studie von MOSKOWITZ (1968), bei der für den indirekt ermittelten Lautstärkeexponenten ein Wert von 0,676 angegeben wird.

### 1.3.3. Der fehlende Numéraire

Lassen auch die von Stevens gefundenen Meßergebnisse keine Zweifel an ihrer Richtigkeit zu<sup>19</sup>, so sind sie doch alternativ zu deuten. Eine Deutung ist die von Stevens vertretene, daß die subjektive Empfindung objektiver Reize gemessen wurde. Es gibt aber auch eine andere<sup>20</sup>. Sie geht auf eine kurze Bemerkung von EKMAN (1964) zurück und basiert auf der bereits von GARNER, HAKE und ERIKSEN (1956, S. 155–157) und ATTNEAVE (1962, S. 623–627) u.a. geäußerten Vermutung, daß das Number-Matching im Grunde auch nur eine Art von Cross-Modality-Matching sei<sup>21</sup>, weil dabei die Empfindungsintensität, die uns Zahlen vermitteln, der Empfindungsintensität des jeweils zu untersuchenden Reizes gleichgesetzt werde. Ist also z.B. in den obigen Gleichungen (16)–(18) die Funktion  $s_1 = \alpha_1 r_1^{\Theta_1}$  die Empfindungsfunktion für Zahlen, und hat man für einen bestimmten Reiz  $r_2$  mit Hilfe des Number-Matching den Exponenten  $\Theta^*$  ermittelt, dann stellt dieser Exponent in Wahrheit nichts als die Relation der wirklichen Exponenten der Empfindungsfunktion für den betrachteten Reiz ( $\Theta_2$ ) und für Zahlen ( $\Theta_1$ ) dar:

$$(19) \quad \Theta^* = \frac{\Theta_2}{\Theta_1}.$$

Da gleiches natürlich auch für alle anderen Exponentenschätzungen gilt, wird immer nur eine Skala an der anderen gemessen. Dem gesamten System der Cross-Modality-Schätzung fehlt daher ein Numéraire, der die Beziehung zur wirklichen Empfindungsintensität herstellt.

Das einzige, was Stevens anzubieten hat, ist die bloße Annahme, daß der Exponent auch für die Zahlenempfindung gleich 1 ist<sup>22</sup>. Sie wird auch nicht dadurch plausibler, daß Zahlen und Streckenlängen subjektiv offenbar in einer genau proportionalen Beziehung stehen ( $\Theta^* = 1$ )<sup>23</sup>, denn wer sagt uns, wie das Gesetz lautet, das unsere Streckenempfindung steuert? Vom Stand-

<sup>19</sup> Dem Verf. ist keinerlei Kritik an der Verlässlichkeit der Messungen bekannt.

<sup>20</sup> Eine weitere Deutung stammt von WARREN (1958), der behauptet, in den Meßergebnissen spiegele sich die in der Wirklichkeit erfahrene Korrelation der angebotenen Reize und, soweit vorhanden, die Kenntnis physikalischer Maßskalen wieder. Diese Deutung ist aber nicht damit vereinbar, daß Versuchspersonen vertraute Größen wie Flächen und Gewichte „falsch“ schätzen (vgl. Tab. 1). Außerdem ist es bei dieser Deutung kaum verständlich, daß konsistente Schätzungen beim Cross-Modality-Matching erzielt werden, wo die Versuchspersonen gezwungen werden können, in der Natur nicht miteinander korrelierte Reize in Beziehung zu setzen.

<sup>21</sup> Diese Auffassung vertritt auch STEVENS (1975, S. 34 u. 107f.), freilich ohne daraus ähnliche Schlüsse wie Ekman zu ziehen.

<sup>22</sup> STEVENS (1975, S. 107).

<sup>23</sup> Ebenda, S. 14.

punkt Fechners würde man auf das Webersche Gesetz beim Linienvergleich hinweisen und die keineswegs lineare, sondern stark gekrümmte logarithmische Empfindungsfunktion ermitteln.

Wie sehr das Fehlen einer absoluten Bezugsgröße das Stevenssche Gebäude der Exponentenrelationen ins Wanken bringt, zeigt sich, wenn man einmal in Gedanken den Exponenten für die Zahlenempfindung vom Wert 1 gegen den Wert 0 und damit zugleich alle anderen wahren Exponenten gegen 0 schrumpfen läßt, ohne dabei die gemessenen Exponenten zu verändern. Zeichnet man die Empfindungsfunktionen in einem  $\ln s$ - $\ln r$ -Diagramm ein, dann führt der Schrumpfungsprozeß zur Drehung aller Geraden zur Abszisse hin. Bei gegebener Spannweite der  $\ln r$ -Werte strebt dadurch die Spannweite der  $\ln s$ -Werte auf der Ordinate gegen 0. Die Krümmung der  $\ln s$ -Kurve verliert auf diese Weise zunehmend an Bedeutung, und die  $\ln s$ -Kurve kann schließlich durch eine Gerade approximiert werden. Damit kommen wir faktisch zu einem halblogarithmischen Diagramm, was impliziert, daß im Grenzfall alle Stevensschen Potenzfunktionen durch logarithmische Funktionen vom Fechner-Typ darstellbar sind.

Um diese heuristischen Überlegungen zu überprüfen, nehmen wir an, daß die Empfindungsfunktionen logarithmisch sind und probieren  $s_1 = \alpha_1 + \beta_1 \ln r_1$  als Empfindungsfunktion für Zahlen und  $s_2 = \alpha_2 + \beta_2 \ln r_2$  als irgendeine andere Empfindungsfunktion. Wegen<sup>24</sup>

$$(20) \quad \alpha_1 + \beta_1 \ln r_1 = \alpha_2 + \beta_2 \ln r_2$$

erhalten wir tatsächlich die Geradengleichung

$$(21) \quad \ln r_1 = \ln \kappa + \Theta \ln r_2 \quad \text{mit} \quad \kappa = \exp\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\beta_1}\right) \quad \text{und} \quad \Theta = \frac{\beta_2}{\beta_1},$$

die der Stevensschen Funktion (14) entspricht, wenn die von den Versuchspersonen genannten Zahlen als „Reiz“  $r_1$  und nicht als Empfindung  $s$  gedeutet werden. Dies ist Ekmans Resultat, das in völlig analoger Weise auch auf beliebige andere Reizzusammenstellungen ausgedehnt werden kann.

Eine möglicherweise an dieser Stelle auftretende Frage ist, ob Stevens vielleicht teilweise Recht hat, indem einige Empfindungsfunktionen exponentiell, andere hingegen logarithmisch sind. Die obigen heuristischen Ausführungen führen zu einer eindeutigen Verneinung dieser Frage. In der

<sup>24</sup> Hier sind die logarithmischen Funktionen bis auf eine additive Konstante bestimmt, da eine Änderung der Dimension von  $r$  keinen Einfluß haben darf:

$$\alpha' + \beta \ln(rx) = \alpha + \beta \ln r \quad \text{mit} \quad \alpha = \alpha' + \beta \ln x.$$

Tat, probiert man einmal  $s_1 = \alpha_1 + \beta_1 \ln r_1$  und  $s_2 = \kappa_2 r_2^{\Theta_2}$ , so daß beim Cross-Modality-Matching die Gleichung

$$(22) \quad \alpha_1 + \beta_1 \ln r_1 = \kappa_2 r_2^{\Theta_2}$$

gelten müßte und folglich

$$(23) \quad \ln r_1 = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\kappa_2}{\beta_1} r_2^{\Theta_2}$$

wäre, so ergäbe sich wegen  $r_2^{\Theta_2} = (e^{\ln r_2})^{\Theta_2} = e^{\Theta_2 \ln r_2}$  und  $\Theta_2 > 0$  eine konvexe Kurve im  $\ln r_1$ - $\ln r_2$ -Diagramm, die den Stevensschen Meßergebnissen widerspricht. Stevens hat also mit seiner Interpretation der Meßergebnisse entweder Recht oder er hat Unrecht. Eine Zwischenlösung gibt es nicht. Zusammenfassend können wir somit feststellen: Ob die Empfindungsfunktion der Klasse der Potenzfunktionen ( $s = \kappa r^{\Theta}$ ) oder der Klasse der logarithmischen Funktionen ( $s = \alpha + \beta \ln r$ ) angehören, bleibt bei den Ergebnissen der direkten Größenschätzung offen. Auf jeden Fall müssen aber alle Empfindungsfunktionen zur selben Klasse gehören. Das heißt z. B., daß *alle* Empfindungsfunktionen logarithmisch sind, wenn nur eine *einzig*e logarithmische Funktion nachgewiesen wird.

#### 1.3.4. Die empirische Bestätigung des Fechnerschen Gesetzes

##### Das Phänomen der logarithmischen Intervallskalen

Die Frage ist jetzt, welche Klasse von Empfindungsfunktionen in der Wirklichkeit vorliegt: Jene der logarithmischen oder jene der Potenzfunktionen. Zwar kommt man weder über Addition gerade merklicher Unterschiede noch über direktes Number-Matching zur Entscheidung, doch gibt es ein Verfahren, welches es wenigstens prinzipiell gestattet, die richtige Funktion zu finden.

Es ist das Verfahren der *Intervallschätzung*, bei dem die Versuchsperson gebeten wird, gegebene Reize in subjektiv äquidistante Größenkategorien zu unterteilen oder eine Abfolge von Reizintensitäten so zu manipulieren, daß die Abstände zwischen ihnen subjektiv gleich erscheinen. Daß bei diesem Verfahren, das ja der Idee nach der Fechnerschen Addition von Reizschwelen ähnelt, nicht mehr als eine Intervallskala herauskommen kann, versteht sich von selbst. Der grundlegende Unterschied zwischen dieser Methode und den direkten Meßmethoden liegt darin, daß nicht ein Reiz mit einem anderen verglichen wird, sondern der Zuwachs eines Reizes auf einem bestimmten Intensitätsniveau mit einem Zuwachs *desselben* Reizes auf einem anderen Intensitätsniveau.

Welche Gesetzmäßigkeit für die subjektiv gleich erscheinenden Abstände  $\Delta r$  gelten, wenn die eine oder die andere Funktionsklasse vorliegt, erkennt

man aus der Forderung

$$(24) \quad \Delta s \approx s'(r) \Delta r = \text{const.},$$

die impliziert, daß die Elastizität von  $\Delta r$  in bezug auf  $r$ , und jene von  $s'(r)$  in bezug auf  $r$ , die wir  $\eta_{\Delta r, r}$  und  $\eta_{s'(r), r}$  nennen, sich zu Null ergänzen:

$$(25) \quad \eta_{\Delta r, r} = -\eta_{s'(r), r}.$$

$-\eta_{s'(r), r}$  ist ein Konkavitätsmaß und charakterisiert eindeutig die gesuchte Funktionsklasse:

$$(26) \quad -\eta_{s'(r), r} = \begin{cases} 1 - \Theta \Leftrightarrow s(r) = \alpha + \beta \Theta r^\Theta, & \beta > 0, \quad \Theta \neq 0, \\ 1 \Leftrightarrow s(r) = \alpha + \beta \ln r, & \beta > 0. \end{cases}$$

Durch Nachrechnen läßt sich diese Behauptung leicht überprüfen. Wird (26) in (25) substituiert, so erhält man für die beiden konkurrierenden Gesetze:

$$(27) \quad \eta_{\Delta r, r} \begin{cases} < 1, & \text{wenn } s = \alpha r^\Theta, \Theta > 0 & \text{(STEVENS),} \\ = 1, & \text{wenn } s = \alpha + \beta \ln r & \text{(FECHNER).} \end{cases}$$

Beim *Fechnerschen Gesetz* nimmt also die Größe der gleich erscheinenden Zuwachsschritte *proportional* und beim *Stevensschen Gesetz* *unterproportional* mit der Größe des Reizniveaus zu. Falls  $\Theta < 0$ , d.h.  $\eta_{\Delta r, r} > 1$ , dann ist die Empfindungsfunktion stärker als eine logarithmische Funktion gekrümmt: weder das Fechnersche noch das Stevenssche Gesetz liegen vor.

Ekman's Argumentation hat uns gezeigt, daß es vom theoretischen Standpunkt aus keinen Gegensatz zwischen den Stevensschen Aussagen und dem Fechnerschen Gesetz gibt. Die dadurch bereits eingeleitete Rehabilitierung Fechners wird durch die Messungen nach der Intervallmethode vervollständigt. Sie weisen dem logarithmischen Empfindungsgesetz weit mehr Relevanz zu, als es Stevens und seine Epigonen<sup>25</sup> wahrhaben wollen.

So ermittelte zwar der Urheber der Intervallmethode PLATEAU (1872) den Wert  $\eta_{\Delta r, r} = 2/3$ , als er eine Reihe von Malern bat, mit Hilfe von Farben ein Grau in der Mitte zwischen Schwarz und Weiß zu mischen<sup>26</sup>, doch mußte er

<sup>25</sup> Vgl. dazu die Beiträge in dem von CARTERETTE und FRIEDMAN (1974) herausgegebenen "Handbook of Perception".

<sup>26</sup> Gibt es nur zwei Intervalle, die einander gleich gemacht werden sollen, spricht man auch von der *Bisection-Methode*. Die Versuchsperson wird dabei gebeten, einen von ihr manipulierbaren Reiz  $\bar{r}$  in die Mitte zweier anderer Reize  $r_1$  und  $r_2$  zu legen. Gilt das Fechnersche Gesetz, dann ist zu erwarten, daß  $\bar{r} = \sqrt{r_1 r_2}$ , denn diese Gleichung impliziert, daß

$$\ln \bar{r} = \frac{\ln r_1 + \ln r_2}{2}.$$

sich alsbald von DELBOEUF (1873, bes. S. 50–101) korrigieren lassen, der das Experiment in modifizierter Form wiederholte: Delboeuf erzeugte den Grauton durch eine rotierende Scheibe mit schwarzen und weißen Feldern, was den Vorteil einer exakten Kenntnis des Mischungsverhältnisses brachte. Seine Ergebnisse sprachen für die logarithmische Funktion.

Bei der Wiederholung von Delboeufs Experiment fand *Guilford* (1954, S. 199f.), daß die Krümmung der Empfindungsfunktion nicht, wie Plateau behauptete, kleiner als die der logarithmischen Funktion, sondern im Gegenteil sogar etwas größer ist. Aus seinen Zahlenangaben errechnet sich<sup>27</sup> nämlich  $\eta_{\Delta r, r} = 1,15$ , was eher für Fechners Hypothese als für die von Stevens spricht.

Auch HELSONS (1947) Experimente bestätigen eine logarithmische Empfindungsfunktion für Licht- und Lautstärken. Werden nämlich mehrere Reize nacheinander angeboten, dann pflegt das geometrische Mittel der wahrgenommenen Reizintensitäten als Adaptionsniveau, d.h. als Bezugspunkt für die sich anschließenden Reize zu fungieren. Die Formel für das Adaptionsniveau ( $AN$ ) lautet für wahrgenommene Reizintensitäten  $r_i$

$$(28) \quad AN = \prod_{i=1}^n r_i^{w_i}$$

mit  $w_i$  als Gewichtungsfaktoren der einzelnen Reize. Wegen

$$(29) \quad \ln AN = \sum_{i=1}^n w_i \ln r_i$$

wird offenbar eine logarithmische Empfindungsfunktion impliziert<sup>28</sup>.

Eine logarithmische Funktion ( $\eta_{\Delta r, r} = 1$ ) ist weiterhin das Ergebnis eines Versuches, den TITCHNER (1905a, S. 33f. u. S. 82–85), wie er berichtet, von Sanford übernommen hat, und bei dem es darum geht, Gewichte in subjektiv äquidistante Kategorien einzuordnen.

Fast ein *experimentum crucis* liefert jedoch ein von THURSTONE (1929) und GUILFORD (1954, S. 103–106) durchgeführter Häufigkeitstest, der den Anschein erweckt, als sei er als Antwort auf das Stevenssche Number-Matching

<sup>27</sup> Schreiben wir die bis auf eine positive Lineartransformation bestimmte Empfindungsfunktion als  $s = \Theta r^\Theta$ ,  $\Theta \neq 0$ , wobei das  $\Theta$  als Faktor nur eine Vorzeichenfunktion wahrnimmt, haben wir bei zwei Reizen  $r_1$  und  $r_2$ , deren psychologischer Mittelwert  $\bar{r}$  ist, die Formel  $\Theta \bar{r}^\Theta = (\Theta r_1^\Theta + \Theta r_2^\Theta)/2$  woraus sich  $\Theta$  und damit auch  $-\eta_{s(r), r} = \eta_{\Delta r, r} = 1 - \Theta$  durch Probieren bestimmen läßt. Aus den von Guilford ermittelten Werten  $r_1 = 100$ ,  $r_2 = 2500$  und  $\bar{r} = 411$  erhält man  $\Theta = -0,1529 \dots$

<sup>28</sup> Für eine detaillierte Begründung der Formel siehe auch HELSON (1964, S. 57–62). Die Beziehung zum Fechnerschen Gesetz wird in der „reformulation“ auf S. 197–231 behandelt. Vgl. ferner JOHNSON (1955, S. 343–348).

konstruiert worden, was wegen der zeitlichen Reihenfolge freilich gar nicht möglich ist. Die Versuchspersonen haben dabei die Aufgabe, weiße Karten, die in unterschiedlicher Dichte mit schwarzen Punkten übersät sind, nach der Zahl der Punkte in subjektiv äquidistante, durchlaufend numerierte Kategorien einzuordnen. Es zeigt sich, daß die Kategorieziffern eine logarithmische Funktion der wahren Punktzahl sind. Gegen diese Versuche (wie ähnlich auch gegen den von Sanford) kann freilich eingewendet werden<sup>29</sup>, daß die Versuchspersonen möglicherweise dazu neigen, die Kategorien gleichmäßig zu besetzen, und deshalb die Verteilung der Punktdichten in der Menge der einzuordnenden Karten einen Einfluß auf das Ergebnis hat. Doch wenn man den Einwand für gravierend hält, muß man sich fragen, ob es wohl ein Zufall ist, daß die Menschen ein Zahlensystem gewählt haben, bei dem die Länge der geschriebenen Zahl nicht proportional zu der mit ihr ausgedrückten Häufigkeit, sondern proportional zu deren Logarithmus ist.

Trotz ihrer Kritik an dem betrachteten Experiment müssen auch STEVENS und GALANTER (1957) und STEVENS (1961) die Tendenz der Ergebnisse bestätigen<sup>30</sup>. Auch sie finden bei den Intervallskalen im Vergleich zum Number-Matching einen nicht mehr erklärbaren Bias hin zu einer stärkeren Krümmung der Kurven, wegen (24)–(27) also auch hin zum Fechnerschen Gesetz.

Zum Problem dieses Bias sind im Anschluß an die oben erwähnten Arbeiten von Stevens und Galanter eine ganze Reihe von empirischen Untersuchungen durchgeführt worden. Das für Fechner triumphale Ergebnis fassen EKMAN und SJÖBERG (1965, S. 464) in ihrem Übersichtsartikel zusammen: "The logarithmic relation between indirect interval and direct ratio scales is now a well-established fact for a great number of continua." Von den empirischen Untersuchungen seien besonders jene von GALANTER und MESSICK (1961) und EISLER (1962b) hervorgehoben<sup>31</sup>. In beiden Untersuchungen wird für die Lautstärkeempfindung eine logarithmische Intervallskala und eine Potenzfunktion als Number-Matching-Skala nachgewiesen. Das Ergebnis ist insofern von großer Bedeutung, als gerade in bezug auf die Lautstärke besonders viele Cross-Modality-Studien durchgeführt worden sind<sup>32</sup>. Es sei aber nochmals in Erinnerung gerufen: Das gesamte Stevenssche Skalensystem führt bereits dann zu logarithmischen Empfindungsfunktionen, wenn nur für irgendeine in ihm enthaltene Skala eine logarithmische Beziehung nachgewiesen wird!

Neben den angeführten Ergebnissen findet man Evidenz für logarithmische Funktionen übrigens auch bei einigen technischen Maßskalen. So stellt

<sup>29</sup> Siehe THURSTONE (1929, S. 223f.).

<sup>30</sup> Vgl. auch STEVENS (1975, S. 130 u. 147–149).

<sup>31</sup> Siehe STEVENS (1975, S. 115–120).

<sup>32</sup> Weitere zu analogen Ergebnissen führende Untersuchungen werden bei EKMAN und SJÖBERG (1965) zitiert.

die Decibel-Skala für die Lautstärke eine logarithmische Beziehung zum physikalischen Schalldruck her, die Blendeneinteilung in der Photographie ist eine logarithmische Funktion der Lichtenergie, und entsprechendes gilt auch für die DIN-Skala der Filmempfindlichkeit<sup>33</sup>.

Außerordentlich erstaunlich ist es weiterhin, daß im Trend sogar eine logarithmische Beziehung zwischen der Tonleiter und der Frequenzhöhe besteht, wie es Abb. 4 verdeutlicht<sup>34</sup>. Die systematische Schlängelung um den logarithmischen Trend rührt daher, daß zwar je sieben Tonschritte (Oktave) zu einer Frequenzverdopplung führen, nicht jedoch jeder einzelne Schritt zu einem gleichen prozentualen Anwachsen der Frequenz.

In der Schlängelung drückt sich die von J.S. Bach vorgeschlagene Wohltemperatur der Tonskala aus, die zur Vermeidung von Tonschwebungen die Frequenzrelationen aller Tonpaare dem Verhältnis zweier ganzer Zahlen gleich macht. Die Wohltemperatur widerlegt nun nicht, wie man vielleicht glauben könnte, die Fechner-Hypothese, daß gleiche Prozentsprünge als subjektiv gleich erscheinen, denn die Stufen auf der wohltemperierten Skala erscheinen als unterschiedlich, was sich z.B. daran zeigt, daß das Klangbild einer in A-Dur sich von jenem einer in C-Dur gespielten Melodie unterscheidet, während der Sprung über eine ganze Oktave das Klangbild unverändert läßt.

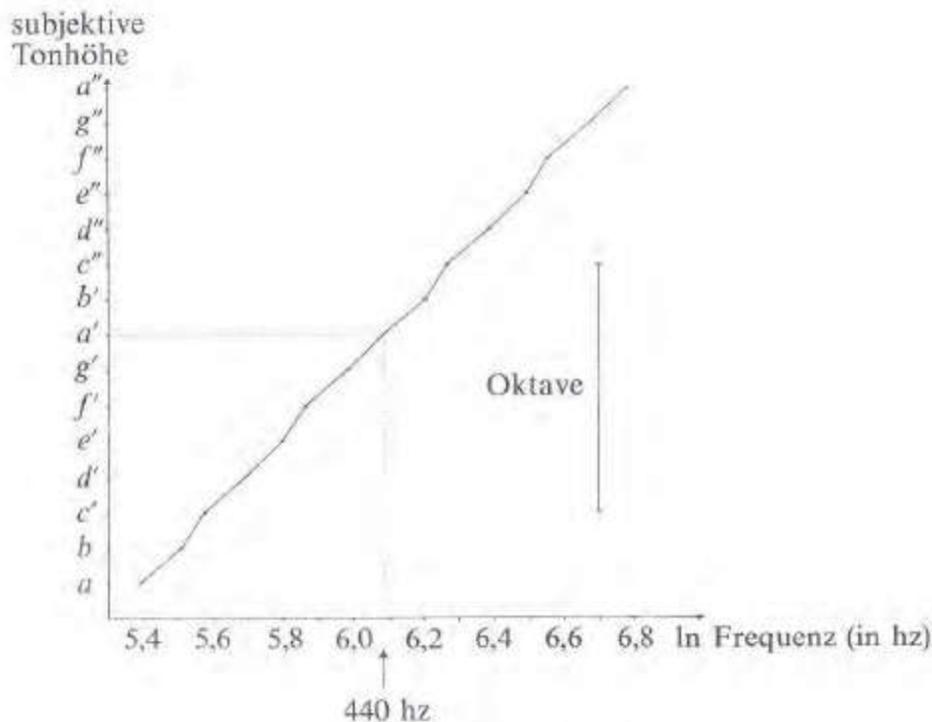


Abbildung 4

<sup>33</sup> 3° DIN = 1 Blendenstufe = Verdoppelung bzw. Halbierung der Lichtintensität.

<sup>34</sup> Zur historischen Entwicklung der Tonskala vgl. BORING (1942, S. 312–332). Die Verbindung mit dem psychologischen Relativitätsgesetz wird bereits bei E.H. WEBER (1846, S. 106), WUNDT (1963, S. 81) und LIPPS (1905, S. 115–128 (Theorie der Tonrhythmen)) hergestellt.

Das Ergebnis ist insofern von besonderer Bedeutung, als bei der historischen Entwicklung der Tonleiter sicherlich keine Mathematiker das Sagen hatten. Vielmehr zeigt sich auch hier das Fechnersche Gesetz in aller Klarheit: Gleiche relative Frequenzänderungen werden als gleiche absolute Tonänderungen empfunden.

Auch experimentell konnte dies bestätigt werden. So stellte WARD (1954, bes. S. 373) fest, daß sich Musiker zwar bei der Aufgabe, die Oktave eines dargebotenen Basistones zu „produzieren“, recht schwer taten, doch immerhin blieben sie, als es um die Herstellung höherer Oktaven ging, mit erstaunlicher Exaktheit bei ihrer „subjektiven Oktave“: Ihre „subjektive Oktave“ war also in der Regel keine Frequenzzunahme von 100%, doch machte sie einen in bezug auf die Ausgangsfrequenz *festen* Prozentzuwachs aus<sup>35</sup>.

#### Die Ergebnisse neurologischer Messungen

Die bisher angeführten empirischen Befunde haben eines gemeinsam: In jedem Fall ging es um eine funktionale Beziehung zwischen einer physikalisch meßbaren Größe und einer subjektiven Empfindung, die durch einen bewußten Willensakt wieder in ein objektives Maß verwandelt werden mußte, um mitteilbar zu werden. Ein ganz anderer Weg, der subjektiven Empfindung nachzuspüren, besteht in der direkten Messung der elektrochemischen Prozesse im Nervensystem. Für einfache Reize, die im Prinzip von einem Rezeptor nebst Nervenfasern allein zu übermitteln sind, ist man dabei bereits erstaunlich weit gekommen, was insbesondere den Untersuchungen von FRÖHLICH (1921) und ADRIAN (1928)<sup>36</sup> zu verdanken ist. Man weiß jetzt, daß der bei einem Rezeptor auftretende Reiz dort zunächst in einen Aktionsstrom umgewandelt wird und dann in einem komplizierten Wechselspiel chemischer und elektrischer Prozesse über die Nervenfasern weitergeleitet wird. Hervorzuheben ist hierbei, daß die Intensität eines Reizes die (in mV gemessene) Stärke des Aktionsstromes und diese ihrerseits die Frequenz von Impulsen, die die Nervenfasern durchlaufen, steuert.

<sup>35</sup> Die Tonfrequenz gehört zur Gruppe der sog. metathetischen (qualitativen) Kontinua, für die nach STEVENS (1957) auch mit Hilfe des Number-Matching logarithmische Funktionen gewonnen werden können. EISLER (1963, S. 252) weist darauf hin, daß dieser Umstand eine lineare Funktion der Zahlenempfindung impliziert, was nicht mit den obigen Überlegungen zur logarithmischen Zahlenempfindungsfunktion vereinbar ist. EKMAN und SJÖBERG (1965, S. 470) entgegnen aber zu Recht, daß die Vorstellung eines Nullpunktes bei metathetischen Skalen unsinnig ist. Wenn die Versuchsperson trotzdem zum Number-Matching veranlaßt werde, verwende sie die Zahlen nicht zur Größenschätzung, sondern nur, um unterschiedliche Kategorien zu beziffern. Dann hätte die Versuchsperson „the best in an impossible experiment situation“ getan.

<sup>36</sup> Für eine zusammenfassende Darstellung siehe auch ADRIAN (1932; 1947).

Von besonderer Bedeutung ist für uns die funktionale Beziehung zwischen Reizintensität, Stärke des Aktionsstromes und Impulsfrequenz. Das erste Ergebnis hierzu stammt von FRÖHLICH (1921, bes. S. 15); ihm gelang es, für die Lichtempfindung die Aktionsstromstärke als logarithmische Funktion der Reizintensität nachzuweisen. Ähnlich folgt aus den Versuchsergebnissen von HARTLINE und GRAHAM (1932), HARTLINE (1938), FUORTES (1959) sowie FUORTES und POGGIO (1963), daß die Lichtintensität nach einer logarithmischen Funktion in die Impulsfrequenz transformiert wird. Die Kompatibilität mit Fröhlichs Ergebnis erfordert dann natürlich eine Proportionalität zwischen Aktionsstromstärke und Impulsfrequenz. Genau das wurde von KATZ (1950) und FUORTES und POGGIO (1963) nachgewiesen. Auch für andere Sinnesbereiche konnten diese Ergebnisse bestätigt werden. So haben GALAMBOS und DAVIS (1943) und TASAKI (1954) auch für die Übermittlung der Lautstärke approximativ logarithmische Funktionen gefunden, und nach MATTHEWS (1931) und VAN LEEUVEN (1949) ist die Frequenz in den die Muskelspannung meldenden Nervenbahnen eine logarithmische Funktion des vom Muskel gehaltenen Gewichts<sup>37</sup>. Die Parallelität solcherlei Ergebnisse zum Fechnerschen Gesetz, auf die besonders von GRANIT (1955, S. 8–23) hingewiesen wurde, ist nicht zu übersehen<sup>38</sup>. Einschränkend muß allerdings bemerkt werden, daß bei den zitierten Untersuchungen der wahre Kurvenverlauf gegenüber dem einer logarithmischen Funktion an den

<sup>37</sup> Bei andauerndem Reiz kommt es im Zeitablauf zu einer Abnahme der Impulsfrequenz als Kennzeichen eines Adaptionvorganges. Die logarithmischen Funktionen beziehen sich, soweit es um die Impulsfrequenz geht, in der Regel auf die maximale Frequenz, definiert als

1

„minimaler Zeitabstand zwischen zwei Impulsen“

oder „Zahl der Impulse in der ersten  $\frac{1}{10}$  Sekunde“. Mißt man die Impulsfrequenz über einen längeren Zeitraum oder zum Abschluß einer längeren Zeitspanne, erhält man mitunter, wie es sich bei den Untersuchungen, an denen Hartline beteiligt war, gezeigt hat, keine logarithmischen Funktionen mehr, da in diesem Falle der möglicherweise je nach Reizintensität unterschiedliche Adaptionprozeß das Ergebnis beeinflussen kann. Das gleiche gilt, wenn man die Frequenz aus den „ersten x Impulsen“ berechnet, wo dann sogar noch eine intensitätsabhängige Veränderung der Meßperiode mit ins Spiel kommt. Mißt man die Frequenz nach erfolgter Adaption in Abhängigkeit von der Intensität des ununterbrochen präsentierten Reizes, hat man wieder eine eindeutige, logarithmische Funktion. Siehe dazu GALAMBOS und DAVIS (1943, S. 48). Anzumerken ist, daß eines der von Galambos und Davis wiedergegebenen Resultate (S. 47, Figur 8) im halblogarithmischen Diagramm schwach konkav ist, was anzeigt, daß die Frequenzfunktion dort stärker als eine logarithmische Kurve gekrümmt ist.

<sup>38</sup> ROSNER und GOFF (1967) vertreten die Meinung, daß die Ergebnisse auch im Einklang mit dem Potenzgesetz stehen. Ihre eigenen Messungen geben dieser Position indes wenig Unterstützung: Sie messen die Beziehung zwischen der Stärke eines

Grenzen des Reizkontinuums abgeflacht ist, so daß im halblogarithmischen Diagramm ein Verlauf entsteht, der einem etwas zackig gezeichneten  $S$  entspricht. Wie man durch Integration der König-Brodhunschen Kurve der Abb. 2 leicht überprüfen kann, liegt damit vermutlich dasselbe, im praktischen Reizbereich irrelevante Phänomen vor, das für die Zunahme der relativen Reizschwelle bei extremen Reizniveaus sorgt. Die Abflachung ist rein technisch auch gar nicht zu vermeiden, wenn es eine absolute untere Reizschwelle und eine Obergrenze für die übermittelbare Impulsfrequenz gibt<sup>39</sup>.

### 1.3.5. Ergebnis

Die Frage nach dem *psychophysischen Gesetz* ist die Frage nach der Beziehung zwischen der objektiven Größe der von den Sinnen wahrgenommenen Reize und der subjektiven Empfindung dieser Größe. Es gibt zwei miteinander konkurrierende Antworten, das *Fechnersche Logarithmus-* und das *Stevenssche Potenzgesetz*.

Das Fechnersche Gesetz folgt aus dem *Weberschen Gesetz* der Relativität der Reizschwellen unter der Annahme, daß Reizänderungen, die gerade die Fühlbarkeitsschwelle überschreiten, als subjektiv gleiche Änderungen anzusehen sind. In der fehlenden Begründung dieser Annahme liegt die Schwäche der Fechnerschen Gesetzeshypothese. Im Gegensatz zu dieser indirekten Schlußweise folgt das Stevenssche Gesetz aus dem Number-Matching, der direkten Zahlenangabe zur Stärke des Reizes durch die Versuchsperson. Das Number-Matching hat mittlerweile für eine Vielzahl von Reizkontinua zu konsistenten Meßergebnissen geführt. Dazu gehören auch Messungen der subjektiven Vorstellungen von Reizen im weiteren Sinne, wie der Länge einer Linie und der Größe einer Fläche. Aber das Stevenssche Gesetz krankt an einer nicht begründbaren Annahme zur Interpretation der Meßergebnisse, nämlich der, daß die Versuchspersonen mit ihren Zahlenangaben die subjektive Empfindungsskala wiedergeben. Gibt es auch eine subjektive

---

elektrischen Stromstoßes ( $r$ ) und der Stärke von dadurch induzierten Gehirnströmen ( $s$ ) und übertragen die Ergebnisse in ein Diagramm mit  $\ln s$  als Ordinaten- und  $\ln r$  als Abszissenbezeichnung. Da alle auf diese Weise erhaltenen Punktwolken nach bloßem Augenschein ganz eindeutig auf konkave Kurven hindeuten, sollte man erwarten, daß die Autoren keine Potenzfunktionen, sondern vielleicht eine logarithmische Funktion ermitteln. Sie probieren beide und errechnen in der Tat bei letzterer eine deutlich kleinere Varianz der Residuen (S. 201). Die kleinste Varianz der Residuen ermitteln sie aber für Kurven, die aus zwei linearen Stücken zusammengesetzt sind, deren jedes durch eine Potenzfunktion beschrieben wird. Hätten sie mit zwei Geradenstücken noch nicht die kleinste Varianz erzielt, so hätten sie auch drei oder mehr Stücke nehmen können. Irgendwann wären sie auf diese Weise mit Sicherheit zu einer Bestätigung des Stevensschen Gesetzes gekommen. Welch treffliche Methode!

<sup>39</sup> Die Obergrenze rührt daher, daß jede Nervenzelle nach der Übermittlung eines Impulses in eine sogenannte refraktäre Phase von etwa 0,001 Sekunden eintritt, während derer sie keine Impulse weiterleiten kann.

Empfindungsfunktion für Zahlen, dann sind alle Messungen Cross-Modality-Ergebnisse und dem Stevensschen Gebäude der Potenzfunktionen fehlt ein Numéraire, der die Beziehung zur wirklichen Empfindungsintensität herstellt. In diesem Fall können die unbeobachteten wirklichen Empfindungsfunktionen vielerlei Gestalt annehmen. Sie können Potenzfunktionen bleiben, wie Stevens es behauptet, aber sie können auch logarithmisch sein. Nur eines ist, wenn die Stevensschen Messungen verlässlich sind, sicher: Sie müssen alle zur selben Klasse gehören.

Der theoretisch richtige Weg zur Empfindungsmessung liegt in der *Intervallschätzung*, bei der die Versuchspersonen Reize in äquidistante Kategorien aufteilen müssen. Die auf diese Weise durchgeführten Untersuchungen bestätigen die Hypothese der logarithmischen Empfindungsfunktionen, also das Fechnersche Gesetz. Nimmt man diese Messungen wie die Stevensschen als richtig an, dann bleibt nur noch ein Schluß übrig: Auch für alle von Stevens untersuchten Reize gibt es logarithmische Empfindungsfunktionen und insbesondere gibt es eine *logarithmische Empfindungsfunktion für Zahlen*.

Neben den Ergebnissen der Intervallschätzungen ist noch ein weiterer Hinweis auf das Fechnersche Gesetz zu beachten. Er liegt in den Versuchen zur direkten Messung der bei der Übermittlung einfacher physikalischer Reize in den Nervenbahnen auftretenden elektrischen Impulse. Das Ergebnis dieser Untersuchungen besagt, daß in der Regel die Impulsfrequenz eine logarithmische Funktion der Reizstärke ist.

#### 1.4. Die gemeinsame Basis: Das Webersche Relativitätsgesetz

„In observando discrimine rerum inter se comparatarum non differentiam rerum, sed rationem differentiae ad magnitudinem rerum inter se comparatarum percipimus.“

Diese Worte, mit denen E. H. WEBER (1834, S. 172)<sup>40</sup> selber seine Theorie der Reizschwellen verallgemeinert, sind die gemeinsame Basis, auf die sich die Ansätze von Bernoulli, Fechner und Stevens stellen lassen. Alle Ansätze haben nämlich eines gemeinsam: Sie gehen davon aus, daß die Menschen ihr Augenmerk auf relative statt auf absolute Reizveränderungen richten. Gleiche relative Änderungen sind gleich merklich, gleich intensiv oder gleich wichtig. Ob auf dem *psychologischen Kontinuum* wie bei Bernoulli und Fechner gleiche Empfindungsdifferenzen oder wie bei Stevens gleiche Empfindungsrelationen als gleich angesehen werden<sup>41</sup> oder ob man wie Weber gar nicht an eine funktionale Beziehung zwischen Reiz und Empfindung denkt, tut dabei wenig zur Sache. Das von Weber formulierte allgemeine

<sup>40</sup> Ähnlich auch WEBER (1834, S. 161 u. 173).

<sup>41</sup> Zur allgemeineren Version ihrer Gesetze vgl. FECHNER (18601, S. 54–69) und STEVENS (1975, S. 18).

psychologische Relativitätsgesetz, das wir von nun an meinen, wenn wir vom *Weberschen Gesetz* sprechen, ist die durch tägliche Erfahrung bestätigte gemeinsame Basis<sup>42</sup>.

Wir erkennen einen Gegenstand bei starkem und bei schwachem Licht, weil die Lichtintensitätsverhältnisse seines Abbildes auf der Netzhaut konstant bleiben, und unabhängig von seiner Entfernung, weil es nicht auf die absolute Größe des Netzhautbildes, sondern auf seine *Proportionen* ankommt. Eine Melodie erkennen wir unabhängig von der Oktave, in der sie gespielt wird und unabhängig von der Entfernung, in der wir sie hören, weil uns gleiche Frequenzrelationen und gleiche Lautstärkerelationen als gleich vorkommen. Es macht uns keine Schwierigkeit, unseren durch ein Blechkleid mit Rädern vergrößerten Körper alltäglich durch das Verkehrsgewühl zu lenken, obwohl wir seit unserer Erschaffung nichts als einen vergleichsweise kümmerlichen Körper zu steuern gelernt haben, und wir leben mit dem Luxus unserer Wohlstandsgesellschaft genauso selbstverständlich, wie es unsere Vorfahren unter weitaus bescheideneren Umständen taten. Wie hätte im übrigen Bohr die Atomstruktur an Hand eines Planetenmodells erklären können, wenn er nicht in Größenrelationen gedacht hätte?

Das Webersche Relativitätsgesetz ist sicher nicht auf die physiologische Erkenntnis zurückzuführen, daß die Impulsfrequenz bei einfachen physikalischen Reizen eine logarithmische Funktion der Reizintensität ist. Dies kann nur *eine* seiner vielfältigen Ausprägungen für besonders einfache Reize sein. Das zeigt sich am Beispiel der Empfindung von Tonhöhen ganz deutlich. Nach der von HELMHOLTZschen (1869) Theorie, die nach einer weitgehenden experimentellen Fundierung durch GALAMBOS und DAVIS (1943) und ihrer Modifikation durch von BÉKÉSY (1956) als gesichert gelten darf<sup>43</sup>, wird

<sup>42</sup> Die Vorstellung eines tiefer liegenden Relativitätsgesetzes wurde von WUNDT (1863, bes. S. 65–76) entwickelt und bei WUNDT (1908, bes. S. 629–645), GROTENFELD (1888), MEINONG (1896), LIPPS (1902; 1905, S. 231–287) weiterverfolgt. Mehr aus dem Wunsch heraus zu zeigen, daß aus dem Weberschen Gesetz auch noch etwas anderes als das Fechnersche folgen könne, als durch wirkliche Fakten veranlaßt, propagierten diese Autoren allerdings die Potenzfunktion der Empfindung, mitunter sogar in ihrer speziellen Form  $\theta = 1$  (Proportionalität). Sie hatten offenbar den Eindruck, daß, besonders wenn gleiche Reizrelationen gleiche Empfindungsrelationen hervorrufen, eine „rein-psychologische“ (Grotenfeld) Erklärung des Relativitätsgesetzes vonnöten wäre. In neuerer Zeit wurde übrigens von KRANTZ (1972) die umfassende streng formale Axiomatisierung einer „relation theory“ versucht.

<sup>43</sup> Von Békésy erhielt für sein Modell der Ohrfunktionsweise 1961 den Nobelpreis. Er widerlegte die von Helmholtzsche Vermutung, daß die Membranen in der mit einer Flüssigkeit gefüllten Schnecke mit den gehörten Frequenzen schwingen. Dazu sind sie schon deshalb nicht in der Lage, weil sie nicht unter Spannung stehen. Dennoch können nach von Békésy die in der Reihenfolge ihrer Steifheit angeordneten Membranen spezifische Frequenzen oder genauer begrenzte Frequenzbänder empfinden, wie es von Helmholtz vermutete.

nicht etwa, wie es vielleicht plausibel wäre, die Tonfrequenz über eine einfache Funktion in eine Frequenz der Nervenimpulse umgesetzt, sondern es gibt frequenzspezifische Rezeptoren, wobei die Impulsfrequenz der angeschlossenen Nervenfasern nur die Aufgabe der Lautstärkenübermittlung hat (nach einem logarithmischen Gesetz). Die Tatsache, daß überhaupt ein Impuls über eine solche Faser gesandt wird, wird im Zentralnervensystem mit einer bestimmten Tonfrequenz assoziiert.

Den Nachweis eines übergeordneten Relativitätsgesetzes liefern aber vor allem die oben zitierten empirischen Untersuchungen über die Empfindung von Streckenlängen (Stevens, Eisler) oder einer Anzahl von gleichmäßig verstreuten Punkten (Thurstone, Guilford). Wenn wir hier Relationen empfinden, so bedarf das doch sicherlich eines sehr komplizierten Auswertungsvorgangs des Netzhautbildes im Zentralnervensystem. Noch komplexer ist der Empfindungsvorgang, wenn es um bloß vorgestellte Reize geht. Wie das Number-Matching beweist, gilt aber Webers Relativitätsgesetz selbst hier.

So zeigt sich, daß unsere Sinne ganz allgemein auf die Relativität getrimmt sind. Daß dies so ist, ist sicher kein Zufall. Die Ursache liegt vermutlich darin, daß die Informationen, die in den von der Umwelt aufgenommenen Reizen enthalten sind, in einer Relativsprache kodiert sind: Gleiche Lautstärkerelationen, gleiche Relationen der Lichtintensitäten oder gleiche Größenproportionen bedeuten in der Regel eine gleiche Information. Es ist daher gar nicht anders vorstellbar, als daß es ein Organismus, dessen Struktur durch einen langwierigen evolutorischen Optimierungsprozeß entstanden ist, gelernt hat, den Relativcode unter ökonomischer Verwendung von „Rechenkapazitäten“ zu entziffern, also die unwichtigen Informationen über das Absolutniveau der Reize herauszufiltern und sich nur noch mit der eigentlichen Information, den Reizrelationen, zu beschäftigen.

## 2. Das Webersche Relativitätsgesetz und die Risikopräferenz

Um dem Weberschen Gesetz Rechnung zu tragen, wollen wir die von Neumann-Morgenstern-Axiomatik um das folgende Axiom erweitern:

Schwaches Relativitätsaxiom: *Gleiche relative Vermögensänderungen werden gleich empfunden.*

Dieses Axiom liefert den von seiten der Psychophysik fundierten Kern der Bernoullischen Idee. Es gibt eine zutreffende Beschreibung der Wirklichkeit, wenn unsere Empfindung der Größe eines Vermögens mit der Empfindung

- einer Zahlengröße,
- der Länge einer Geraden oder
- der Anzahl von Punkten in einer Punktwolke parallel verläuft.

Mit dem Axiom wird nicht gefordert, daß gleiche relative Vermögensänderungen zu einem Vermögensnutzenbetrag aufaddiert werden können. Und erst recht verlangt es keine logarithmische von Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktion. Dennoch läßt das Axiom natürlich eine logarithmische (und damit kardinale) Nutzenfunktion für sichere Vermögen zu. Die ganz überwältigende empirische Evidenz für ein logarithmisches System von Empfindungsfunktionen legt eine solche Funktion ja auch nahe. Beim Mehrperiodenansatz werden wir daher auf das Fechnersche Gesetz zurückgreifen. In diesem Kapitel ist das aber allenfalls illustrationshalber nötig. Hier reicht die oben präsentierte schwache Version des Relativitätsaxioms aus.

### 2.1. Das Relativitätsgesetz und der von Neumann-Morgenstern-Index

Wir haben uns die Frage vorzulegen, welche Implikationen das Relativitätsaxiom für die Gestalt der Risikonutzenfunktion hat. Das oben<sup>44</sup> definierte Maß für die Intensität der Versicherungsnachfrage  $g = p_{\max} q / E(C)$  kommt uns dabei sehr gelegen: Da nach dem Relativitätsaxiom Gewinne und Verluste in Vermögensprozenten bewertet werden, bleibt die Entscheidungssituation des Versicherungsnachfragers unverändert, wenn das Anfangsvermögen  $a$ , die möglichen Schäden  $C$  und die aufgezinste Prämie  $pq$  um den gleichen Prozentsatz anwachsen, wenn also  $a' = \lambda a$ ,  $C' = \lambda C$  und  $p'q = \lambda pq$ . Damit folgt auch, daß  $p'_{\max} q = \lambda p_{\max} q$  und somit wegen

$$(30) \quad g\lambda^0 = \frac{p'_{\max} q}{E(C')} = \frac{\lambda p_{\max} q}{E(\lambda C)} = \text{const.}, \quad \lambda > 0,$$

die Intensität der Versicherungsnachfrage konstant bleibt. Anschaulich könnte man auch behaupten, daß die Intensität der Versicherungsnachfrage bei einer Vermögensversicherung von der Höhe des Vermögens unabhängig ist. Aus dem Umstand, daß  $p'_{\max} q$  und  $E(C')$  proportional mit  $\lambda$  anwachsen, kann man dann zusätzlich schließen, daß wegen  $p'_{\max} q = E(C') + \pi'$  auch der Risikopreis  $\pi$  proportional wachsen muß. Damit sind wir aus dem (allgemeinen) *Weberschen Gesetz* zur Forderung nach einer *Konstanz der relativen Risikoaversion* in der Pratt-Arrow-Terminologie gekommen oder dem, was POLLAK (1970, S. 121) als „schwache Homogenität“ bezeichnet hat. Wie wir in Gleichung (5) feststellen konnten, war diese Konstanz bei Bernoulli eine Implikation der logarithmischen Risikopräferenzfunktion. Hier ist es umgekehrt: Aus dem Relativitätsaxiom folgt die logarithmische Funktion als eine der möglichen Funktionen. Die Frage ist aber, ob es nicht auch noch andere

<sup>44</sup> Siehe Gleichung (II C 17).

passende Funktionen gibt. Daß Bernoulli sich diese Frage nicht vorgelegt hat, sondern sie mit der wie selbstverständlichen Gleichsetzung von Risikopräferenzfunktion und Nutzenfunktion für sichere Vermögen übergang, war sein Fehler.

Die vollständige Klasse der Risikopräferenzfunktionen, die ein konstantes  $g$  implizieren, ist wegen  $p'_{\max} q = \lambda p_{\max} q = \lambda a q - S(\lambda a q - \lambda C)$  aus (II C 14) durch eine linearhomogene Funktion für das Sicherheitsäquivalent,  $S(V) = U^{-1}\{E[U(V)]\}$ , gekennzeichnet:

$$(31) \quad \lambda U^{-1}\{E[U(V)]\} = U^{-1}\{E[U(\lambda V)]\}.$$

Dieser Umstand erlaubt den Rückgriff auf ein Theorem von ACZÉL<sup>45</sup> (1966, S. 151–153), aus dem die *einzigsten* streng monoton ansteigenden<sup>46</sup> Funktionen für  $U(v)$  folgen, die diese Bedingung erfüllen:

$$(32) \quad U(v) = \begin{cases} \Theta v^{\Theta}; & \Theta \neq 0, \quad v > 0, \\ \ln v; & \Theta = 0, \quad v > 0. \end{cases}$$

(Auch strikt positive Lineartransformationen sind zulässig.)

Diese Funktionen, die wir in Zukunft kurz *Weber-Funktionen* nennen wollen, sind als Implikation der konstanten relativen Risikoaversion bereits von PRATT (1964) und ARROW (1965) angeführt worden. Benutzt man das von diesen Autoren entwickelte Maß für lokale relative Risikoaversion, nämlich den negativen Wert der oben<sup>47</sup> schon als Krümmungsmaß verwendeten Elastizität des Grenznutzens

$$(33) \quad \varepsilon(v) \equiv -\eta_{U'(v), v} = -\frac{U''(v)}{U'(v)} v,$$

dann kann man die Risikopräferenzfunktion als

$$(34) \quad U(v) = \begin{cases} (1-\varepsilon) v^{(1-\varepsilon)} & \text{für } \varepsilon \neq 1 \\ \ln v & \text{für } \varepsilon = 1 \end{cases}$$

schreiben, da sich  $\varepsilon$  als Konstante entpuppt. (Man beachte, daß unsere

<sup>45</sup> Den Hinweis auf dieses Theorem verdanke ich I. Strauß. Das Theorem haben wir bereits oben in Kap. II D 2.1.4 im Zusammenhang mit dem Krelle-Schneider-Ansatz benutzt.

<sup>46</sup> Dies muß wegen des Nichtsättigungsaxioms verlangt werden.

<sup>47</sup> Gleichung (26).

Annahme  $g > 1$  impliziert, daß  $\varepsilon > 0$ .) Für die Sicherheitsäquivalente ergibt sich daraufhin

$$(35) \quad S(V) = \begin{cases} E(V^{1-\varepsilon})^{1/(1-\varepsilon)}, & \varepsilon \neq 1, \\ \prod_{i=1}^n v_i^{w_i}, & \varepsilon = 1, \end{cases}$$

mit  $v_i$  als den möglichen Endvermögenszuständen und  $w_i$  als ihren Wahrscheinlichkeiten<sup>48</sup>. Daß die Sicherheitsäquivalentfunktionen in der Tat linearhomogen sind, ließe sich leicht zeigen.

Es ist bemerkenswert, daß die in (34) beschriebenen Funktionen den Bernoulli-Fechner-Typ ( $\varepsilon = 1$ ), die Stevenssche Exponentialfunktion ( $\varepsilon < 1$ ), aber auch einen weit stärker gekrümmten Funktionstyp ( $\varepsilon > 1$ ) umfaßt. Alle drei Typen werden in der Abb. 5 dargestellt.

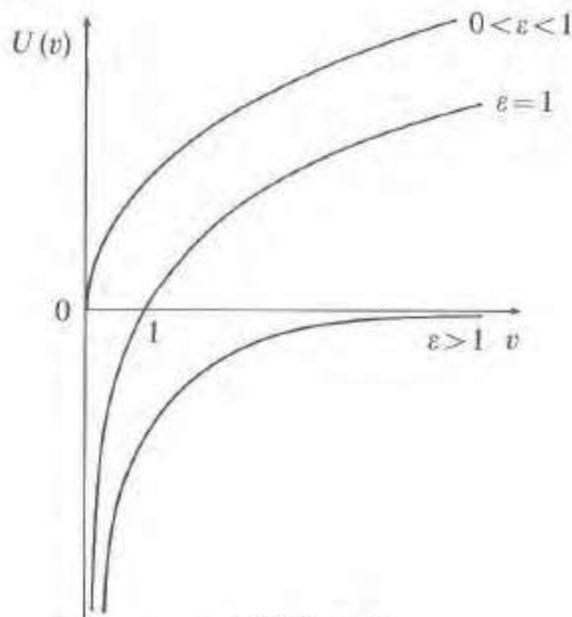


Abbildung 5

Da wir uns wegen der Annahme der Risikofurcht auf konkave Funktionen beschränkt haben, wurde  $(1-\varepsilon)v^{(1-\varepsilon)}$ ,  $\varepsilon \leq 0$ , nicht eingezeichnet. Bei  $\varepsilon = 0$  fände man eine Ursprungsgerade und bei  $\varepsilon < 0$  eine konvexe, waagrecht im Ursprung beginnende Kurve.

Trotz Aczél's Theorem könnte man der Meinung sein, daß dem Relativitätsaxiom auch noch auf andere Weise Genüge getan werden kann. Da nach

<sup>48</sup> Für kontinuierliche Dichtefunktionen lautet das Sicherheitsäquivalent im Fall  $\varepsilon = 1$ :

$$S(V) = e^{\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \ln v dv}$$

diesem Axiom die Präferenzfunktion auf relative Vermögensänderungen abzustellen hat, liegt es nahe, die von Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktion statt über absolute Werte des Endvermögens über Anteile des Endvermögens am aufgezinnten Anfangsvermögen,  $v/aq$ , zu definieren<sup>49</sup>. Dieser Weg wurde im Prinzip, wenn auch für ein anderes Präferenzmodell, von DOMAR und MUSGRAVE (1944, bes. S. 402) und TÖRNQVIST (1945, bes. S. 233) beschrieben, aber auch MARKOWITZ (1952b, bes. S. 155) schlug ihn faktisch ein, als er die Lage der von ihm behaupteten konvexen und konkaven Stücke der Nutzenfunktion vom Anfangsvermögen abhängig machte. Auch diese Autoren hatten also das Relativitätsaxiom im Auge. Weiterhin muß an dieser Stelle TSIANG (1972, S. 358) erwähnt werden, der den gesamten Verlauf der nicht mit (34) übereinstimmenden Nutzenfunktion  $U(v) = -e^{-\alpha v}$  so vom Anfangsvermögen abhängig machen möchte, daß eine konstante relative Risikoaversion herauskommt<sup>50</sup>. Das Sicherheitsäquivalent des standardisierten Endvermögens wäre nach einem solchen Ansatz  $S(V/aq)$ , sein Absolutwert also  $aqS(V/aq)$ . Da dieser Ausdruck eine linear-homogene Funktion von  $V$  und  $aq$  ist, würde wegen

$$(36) \quad g\lambda^0 = \frac{p'_{\max} q}{E(C')} = \frac{\lambda p_{\max} q}{E(\lambda C)} = \frac{\lambda aq - \lambda aq S\left(\frac{\lambda V}{\lambda aq}\right)}{\lambda E(C)}$$

jede beliebige Nutzenfunktion zur Konstanz der Intensität der Versicherungsnachfrage führen. Sogar die verpönte quadratische Funktion wäre zulässig, denn sie verlöre die von Hicks kritisierte Eigenschaft<sup>51</sup>, daß der Risikopreis mit wachsendem Vermögen steigt. Im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm würde nämlich eine Vermögenserhöhung nicht mehr bedeuten, daß man innerhalb eines festen Indifferenzkurvensystems bei gegebenem  $\sigma$  den Wert  $\mu$  erhöht. Statt dessen würde sich gleichzeitig das gesamte Indifferenzkurvensystem durch Ursprungsprojektion in eine *neue Lage* verschieben, so daß der Risikopreis fiel, anstatt zu steigen. Leider ist dieser attraktive Ansatz in allgemeiner Form nicht zulässig, denn wir haben unversehens gegen das Ordnungsassiom, das eine Präferenzordnung über Endvermögenszustände impliziert, verstoßen. Das zeigt sich, wenn wir den Fall der Versicherungsnachfrage betrachten und einmal fiktiv unterstellen, dem potentiellen Versicherungsnehmer werde zum Periodenbeginn der Betrag  $x/q$  geschenkt und

<sup>49</sup> Man könnte natürlich auch das nicht aufgezinnte Anfangsvermögen wählen. Die obige Formulierung entspricht aber am ehesten den anschließend zitierten Autoren, die in einem zeitlosen Modell argumentieren. Im übrigen ist der Unterschied von der Sache her bedeutungslos.

<sup>50</sup> Vgl. S. 119f.

<sup>51</sup> Vgl. Fn. 17, S. 108.

gleichzeitig mitgeteilt, daß sich jeder mögliche Schaden (auch der „Nullschaden“) um den Betrag  $x$  erhöhe. Fragen wir nach dem Sicherheitsäquivalent der Endvermögensverteilung ohne Versicherungsabschluß, erhalten wir die ob solcher Tricks verständnislose Antwort, daß selbstverständlich alles beim alten geblieben sei, da sich die Endvermögensverteilung nicht verändert habe. Diese Antwort bestätigt das Ordnungsaxiom und erfordert, daß

$$(37) \quad aq S\left(\frac{aq-C}{aq}\right) = (aq+x) S\left(\frac{aq+x-(C+x)}{aq+x}\right).$$

Da diese Gleichung bei  $x \neq 0$  nur erfüllt werden kann, wenn  $S(\cdot)$  linearhomogen ist, sind wir wieder bei den in (34) genannten Funktionen und nur bei diesen! Die Standardisierung der Endvermögensverteilung ist also kein Ausweg.

Eine anschauliche *Interpretation* unserer Präferenzhypothese erhalten wir, wenn wir einmal KRELLES (1968, S. 144–147)<sup>52</sup> Vorschlag,  $U(v)$  in eine Nutzenfunktion für sichere Vermögen  $u(v)$  und die eigentliche Risikopräferenzfunktion  $\varphi(u)$  aufspalten, so daß  $U(v) = \varphi[u(v)]$ . Da nach dem Fechnerischen Gesetz

$$(38) \quad u(v) = \ln v$$

die Nutzenfunktion für sichere Vermögen ist, muß die Risikopräferenzfunktion für *Nutzenwerte* dann

$$(39) \quad \varphi(v) = \begin{cases} (1-\varepsilon) e^{(1-\varepsilon)u}, & \varepsilon \neq 1, \\ u, & \varepsilon = 1, \end{cases}$$

sein, damit sich aus der Verbindung beider Funktionen wieder (34) ergibt<sup>53</sup>.

<sup>52</sup> Vgl. S. 88.

<sup>53</sup> Z. B. ist

$$(1-\varepsilon) e^{(1-\varepsilon)\ln v} = (1-\varepsilon) (e^{\ln v})^{1-\varepsilon} = (1-\varepsilon) v^{1-\varepsilon}.$$

Bemerkenswert ist, daß die bei  $\varepsilon \neq 1$  in den Exponenten gesetzte deterministische Nutzenfunktion  $u(v)$  nur noch bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, während natürlich  $(1-\varepsilon) e^{(1-\varepsilon)u(v)}$ , wie bekannt, bis auf eine positive Lineartransformation festliegt. Zwar kann man schreiben

$$\max E[(1-\varepsilon) e^{a+b(1-\varepsilon)u(v)}] = e^a \max E[(1-\varepsilon) e^{b(1-\varepsilon)u(v)}],$$

doch „ $b$ “ läßt sich hier nicht mehr vor den Erwartungsoperator ziehen. Um  $\varepsilon$  auch nach der Aufteilung der von Neumann-Morgenstern-Funktion noch als kardinales Risikomaß interpretieren zu können, setzen wir  $b = 1$ .

Die Funktion  $(1-\varepsilon)e^{(1-\varepsilon)u}$ ,  $\varepsilon \neq 1$ , ist, wenn man  $u$  durch  $v$  ersetzt, als von Neumann-Morgenstern-Funktion auf dem objektiven Kontinuum (Vermögenswerte) seit ihrer Anwendung durch FREUND (1956) bekannt. Sie ist bei  $\varepsilon < 1$  konvex und bei  $\varepsilon > 1$  konkav, was wir hier in Analogie zum üblichen Sprachgebrauch als Risikovorliebe und Risikoaversion auf dem *subjektiven Kontinuum* gleichzusetzen haben. Bei  $\varepsilon = 1$  wird die logarithmische Funktion nicht mehr modifiziert, und es liegt Risikoneutralität auf dem subjektiven Kontinuum vor. Wegen der Krümmung der logarithmischen Funktion haben wir aber dennoch Risikoaversion auf dem objektiven Kontinuum. Sie wird bei Konkavität der eigentlichen Risikopräferenzfunktion  $\varphi(u)$  verstärkt, bleibt aber auch bei einer konvexen Funktion  $\varphi(u)$  noch solange erhalten, wie  $\varepsilon > 0$ . Bei  $\varepsilon \leq 0$  wird die Konkavität der logarithmischen Funktion durch die Konvexität von  $\varphi(u)$  kompensiert, und es entsteht Risikoneutralität bzw. Risikovorliebe auf dem objektiven Kontinuum.

Es gibt eine weitere interessante Eigenschaft der Funktion, die man entdeckt, wenn man die Funktion des *sicherheitsäquivalenten Nutzens* aus dem Ansatz

$$(40) \quad (1-\varepsilon)e^{(1-\varepsilon)S[u(V)]} = E[(1-\varepsilon)e^{(1-\varepsilon)u(V)}]$$

als

$$(41) \quad S[u(V)] = \frac{\ln E[(1-\varepsilon)e^{(1-\varepsilon)u(V)}] - \ln(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon}$$

errechnet und dann einmal alle möglichen Werte, die die Nutzenverteilung annehmen kann, um den Nutzenbetrag  $x$  erhöht. Man erhält

$$(42) \quad S[u(V)+x] = x + S[u(V)],$$

woraus z. B.

$$(43) \quad E[u(V)+x] - S[u(V)+x] = E[u(V)] - S[u(V)]$$

folgt. In der Gleichung (43) wird ein in Nutzentermini berechneter Risikopreis<sup>54</sup> vor und nach der Verschiebung einer Nutzenverteilung vom Ausmaß  $x$  ausgewiesen. Da der Risikopreis offenkundig von der Verschiebung unberührt bleibt, könnte man sagen, die in (34) genannten Funktionen seien durch eine *nutzenniveauunabhängige Risikoaversion auf dem subjektiven Kontinuum* gekennzeichnet. Sie ist einer *konstanten relativen Risikoaversion auf dem objektiven Kontinuum* äquivalent.

<sup>54</sup> Vgl. Gleichung (II C 5).

Für die nutzenniveauunabhängige Risikoaversion auf dem subjektiven Kontinuum bildet die Freundsche Funktion  $U(v) = -e^{-\alpha v}$  ein formal gleiches, aber inhaltlich unterschiedliches Pendant auf dem objektiven Kontinuum. PRATT (1964) und ARROW (1965) haben es *konstante absolute Risikoaversion* genannt. Ersetzt man in (43)  $u(V)$  durch  $V$  und interpretiert man  $x$  als eine Vermögensänderung, so könnte man anschaulich auch von einer *vermögensunabhängigen Risikoaversion* sprechen<sup>55</sup>. Bei aller formalen Verwandtschaft bildet die vermögensunabhängige Risikoaversion in gewisser Hinsicht die Gegenthese zu unserer Präferenzhypothese, die dem Vermögen eine ganz bestimmte Rolle bei der Risikobewertung zuweist und damit den durch  $\varepsilon$  gemessenen *subjektiven* Einfluß durch einen *objektiven* ergänzt.

Im nächsten Abschnitt A 2.2 werden wir die Implikationen unserer Präferenzhypothese und zum Vergleich auch die der vermögensunabhängigen Risikoaversion für den Indifferenzkurvenverlauf im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm untersuchen. Nachdem dies geschehen ist, wird sich im Unterabschnitt A 2.3 die Gelegenheit bieten, weitere inhaltliche Unterschiede beider Hypothesen aufzudecken.

## 2.2. Das Relativitätsgesetz im $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm

Da die Frage nach dem Verlauf der Indifferenzkurven im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm, wie wir wissen, nicht losgelöst von einer von Neumann-Morgenstern-Indexfunktion gesehen werden darf, muß es hier um die Darstellung der in (34) genannten Weber-Funktionen gehen. Natürlich weisen die Indifferenzkurven die bereits abgeleiteten Eigenschaften auf, so das senkrechte Einmünden in die  $\mu$ -Achse<sup>56</sup> und bei linearen Verteilungsklassen den konvexen Verlauf<sup>57</sup> wegen der durchweg unterstellten Risikofurcht.

Dafür, wie auch für weitere Charakteristika, die noch abzuleiten sind, gilt allerdings die derweil undiskutiert angeführte Bedingung, daß der Definitionsbereich der Nutzenfunktion den Streubereich der zu bewertenden Wahrscheinlichkeitsverteilung umfassen muß. Die Bedingung äußert sich in einer Beschränkung der Wahrscheinlichkeitsverteilung auf die positive Halbachse, bei  $\varepsilon < 1$  mit und bei  $\varepsilon \geq 1$  ohne den Ursprung. Im Fall einer linearen Verteilungsklasse bedeutet dies, daß

$$(44) \quad \mu - \underline{k}\sigma \left\{ \begin{array}{l} > \\ \geq \end{array} \right\} 0, \quad \text{also} \quad \mu \left\{ \begin{array}{l} > \\ \geq \end{array} \right\} \underline{k}\sigma, \quad \varepsilon \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ < \end{array} \right\} 1,$$

<sup>55</sup> Die Forderung nach der Vermögensunabhängigkeit der Risikoaversion macht PFANZAGL (1959a, S. 39; 1959b, S. 288) zum Inhalt seines *Konsistenzaxioms*. Das Webersche Relativitätsgesetz impliziert daher in Verbindung mit dem Fechnerschen Gesetz die Gültigkeit des Axioms auf dem subjektiven Kontinuum.

<sup>56</sup> Vgl. Kap. II D 2.2.3 und II D 2.3.

<sup>57</sup> Vgl. Kap. II D 2.3.

sein muß, wenn  $-k$  die größte untere Schranke der standardisierten Zufallsvariablen  $Z = (V - \mu)/\sigma$  ist<sup>58</sup>. Wie die Indifferenzkurven verlaufen, wenn sich der Streubereich auch über die negative Vermögenshalbachse erstreckt, wird im Abschnitt B untersucht werden.

Für *kleine Standardabweichungen bei beliebigen Verteilungsklassen* können wir zunächst mit Hilfe der Formel (II D 50) die Steigung der Indifferenzkurven errechnen. Wenn man in ihr die Ableitung  $U'''(\mu)$  durch den Ausdruck

$$(45) \quad U'''(\mu) = \frac{\varepsilon}{\mu^2} U'(\mu) - \frac{\varepsilon}{\mu} U''(\mu)$$

ersetzt, der sich nach Differentiation der Weber-Funktionen (34) ergibt, dann folgt nach wenigen Umformungen

$$(46) \quad \left. \frac{d\mu}{d\sigma} \right|_{U(\mu, \sigma)} \approx \frac{\varepsilon \frac{\sigma}{\mu}}{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\mu} \right)^2 (\varepsilon + \varepsilon^2)}$$

Die Steigung der Pseudo-Indifferenzkurven ist hiernach konstant, solange der Variationskoeffizient  $(\sigma/\mu)$  der Vermögensverteilung konstant ist. Da dies wiederum auf Ursprungsstrahlen der Fall ist, finden wir ein *homothetisches* Pseudo-Indifferenzkurvensystem, bei dem bekanntlich eine Pseudo-Indifferenzkurve durch Ursprungsprojektion aus der anderen hergeleitet werden kann.

Was die Approximationsgüte anbelangt, können wir jetzt auf die Beispielrechnungen aus dem Abschnitt II D 2.2.2 zurückgreifen. Dort hatten wir festgestellt, daß dann,

- wenn der Vorrat an überhaupt für möglich gehaltenen linearen Verteilungsklassen vom erwarteten Endvermögen unabhängig ist und
- wenn man einen in Prozenten der Standardabweichungen der zu bewertenden Verteilungen angegebenen Genauigkeitsanspruch hat,

die Approximationsgüte eine Funktion des Variationskoeffizienten der Endvermögensverteilung,  $\sigma/\mu$ , ist. Daher liegen im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm die Punkte gleicher Approximationsgüte auf Ursprungsstrahlen, was durch die Gestalt der in der Abb. 6 hervorgehobenen Fläche verdeutlicht wird.

Das Ergebnis eines homothetischen Indifferenzkurvensystems läßt sich für (im Rahmen  $\mu > k\sigma$ ) beliebig *große Standardabweichungen bei linearen*

<sup>58</sup> Vgl. Kap. II B, Abb. 7.

Verteilungsklassen bestätigen: Da sich für die (bis auf die Multiplikation mit einer positiven Konstanten bestimmte) Grenznutzenfunktion aus (34)

$$(47) \quad U'(v) = v^{-\epsilon}$$

errechnet, kann die Formel (II D 59) als

$$(48) \quad \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_{U(\mu, \sigma)} = - \frac{E[Z(\mu + \sigma Z)^{-\epsilon}]}{E[(\mu + \sigma Z)^{-\epsilon}]} \\ = - \frac{E\left[Z\left(\frac{\mu}{\sigma} + Z\right)^{-\epsilon}\right]}{E\left[\left(\frac{\mu}{\sigma} + Z\right)^{-\epsilon}\right]}$$

geschrieben werden, was erneut ein homothetisches Indifferenzkurvensystem anzeigt.

Das Indifferenzkurvensystem der Abb. 6 weist die abgeleiteten Eigenschaften auf. Wegen der in (44) vereinbarten Beschränkung der Vermögensverteilung auf die positive Halbachse werden die Indifferenzkurven noch nicht in den Bereich unterhalb der Geraden  $\mu = k\sigma$  fortgeführt. Offengelassen wird vorläufig auch, wie sie sich dieser Geraden nähern.

Eine erwähnenswerte Eigenschaft ist noch, daß die Steigung der Indifferenzkurven an jedem Punkt oberhalb oder links von der Geraden  $\mu = k\sigma$  kleiner als die des zugehörigen Ursprungsstrahls sein muß:

$$(49) \quad \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_{U(\mu, \sigma)} < \frac{\mu}{\sigma}$$

Wir beschränken uns darauf, diese Eigenschaft für kontinuierliche Dichtefunktionen  $f_z(z; 0, 1)$  mit  $f_z(-k; 0, 1) < \infty$  aufzuzeigen. In diesem Fall kann (48) als

$$(50) \quad \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_{U(\mu, \sigma)} = - \int_{-k}^{\infty} z \xi(z) dz$$

mit dem normierten Gewicht

$$(51) \quad \xi(z) \equiv \frac{f_z(z; 0, 1) \left(\frac{\mu}{\sigma} + z\right)^{-\epsilon}}{\int_{-k}^{\infty} f_z(z; 0, 1) \left(\frac{\mu}{\sigma} + z\right)^{-\epsilon} dz}$$

geschrieben werden und man sieht: Solange  $f_z(-k; 0, 1) < \infty$ , ist auch  $\xi(-k) < \infty$ , denn wenn wir uns mit  $\mu/\sigma > k$  oberhalb der Begrenzungsgeraden befinden, gilt auf jeden Fall  $(\mu/\sigma + z)^{-\varepsilon} < \infty$ . Da  $\xi(-k) < \infty$  hinreichend dafür ist, daß  $-\int_{-k}^{\infty} z \xi(z) dz < \infty$ , folgt (49).

In der Abb. 7 beschränken wir uns in gewohnter Weise auf den Fall der Risikoaversion ( $\varepsilon > 0$ ). Bei Risikoneutralität ( $\varepsilon = 0$ ) oder Risikovorliebe ( $\varepsilon < 0$ ) würden die Indifferenzkurven freilich anders als in der Abb. 6 linear oder konkav verlaufen. Wichtiger, als diese irrelevanten Fälle zu betrachten, ist es, sich den Einfluß der Stärke der Risikoaversion auf den Kurvenverlauf klarzumachen. Differenziert man (46) nach  $\varepsilon$ , so erhält man

$$(52) \quad \left. \frac{d \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_{U(\mu, \sigma)}}{d\varepsilon} \right|_{\frac{\sigma}{\mu}} \approx \frac{\frac{\sigma}{\mu} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\mu} \right)^2 \right]}{\left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\mu} \right)^2 (\varepsilon + \varepsilon^2) \right]^2} > 0, \quad \text{wenn } 0 < \frac{\sigma}{\mu} < \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}.$$

Hieran zeigt sich, daß für kleine Variationskoeffizienten, also gerade dann, wenn die Approximationsgüte groß ist, eine höhere Risikofurcht eine stärkere Krümmung der Indifferenzkurven bedeutet. Dieses Ergebnis läßt sich für lineare Verteilungsklassen an Hand der Formeln (50) und (51) bestätigen. Dort zeigt sich, daß mit einer Zunahme von  $\varepsilon$  der Teil

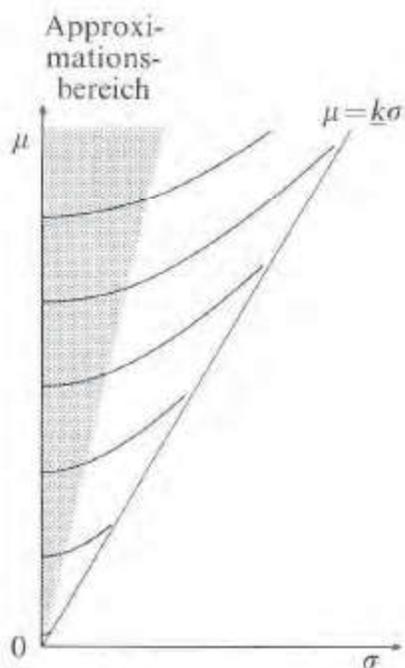
$$\frac{\left( \frac{\mu}{\sigma} + z \right)^{-\varepsilon}}{E \left[ \left( \frac{\mu}{\sigma} + Z \right)^{-\varepsilon} \right]}$$

des Gewichtungsfaktors  $\xi(z)$  zu kleineren Werten von  $z$  hin verschoben wird, so daß das durchschnittliche  $z$  kleiner und somit  $d\mu/d\sigma \Big|_{U(\mu, \sigma)}$  größer wird. Eine genauere Analyse wird im Anhang 1 zu diesem Kapitel gegeben. Das plausible Resultat lautet wie erwartet:

$$(53) \quad \left. \frac{d \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_{U(\mu, \sigma)}}{d\varepsilon} \right|_{\frac{\sigma}{\mu}} > 0, \quad \frac{\sigma}{\mu} > 0.$$

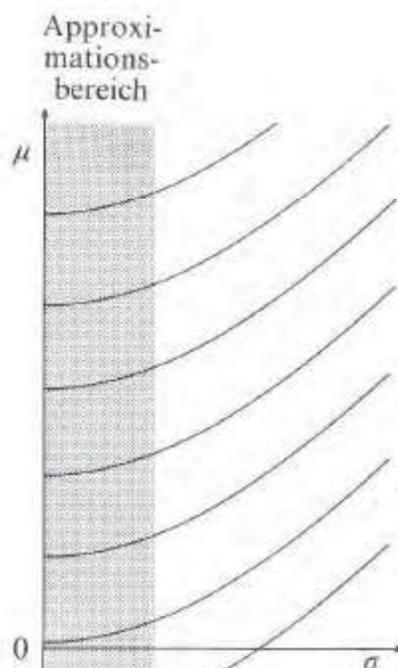
Ein homothetisches Indifferenzkurvensystem nach der Art, wie hier beschrieben, wird bereits von HICKS (1967, S. 114) gefordert. Er bezeichnet das Indifferenzkurvensystem als Standardfall, "from which there might be a divergence, in practical experience, in either direction". Als Vergleichsbasis benutzt es auch STIGLITZ (1969a), und EBEL (1971, S. 112f.) versucht den

Hicksschen Vorstellungen durch die (willkürlich) gesetzte Formel  $d\mu/d\sigma|_{U(\mu,\sigma)} = \varepsilon \sigma/\mu$  gerecht zu werden, die unsere Formel (46) für  $\sigma/\mu \rightarrow 0$  approximiert<sup>59</sup>. Bei allen drei Autoren bleibt aber die Beziehung zum von Neumann-Morgenstern-Index im Dunkeln. Bei SCHNEEWEISS (1967a, S. 201 in Verb. mit S. 87) und PYE (1967, S. 115) finden sich jedoch Hinweise darauf, daß die Funktionen (34) ein homothetisches Indifferenzkurvensystem erzeugen (Pye vergißt  $\ln v$ ). Implizit liegt das homothetische Indifferenzkurvensystem bereits in FISHERS (1906, S. 408f.) Vorschlag, das subjektive Gewicht des Risikos vom Variationskoeffizienten  $\sigma/\mu$  der Vermögensverteilung abhängig zu machen, und in dem von PALANDER (1957)<sup>60</sup> benutzten Sicherheitsäquivalent  $\mu[1 - \alpha(\sigma/\mu)]$ , das MAGNUSSON (1969, S. 245–247) für  $\alpha = 1/2$  als Approximation der logarithmischen Nutzenfunktion nachweisen konnte<sup>61</sup>. Ansonsten findet man praktisch in der gesamten übrigen risikothoretischen Literatur, die sich des  $\mu$ - $\sigma$ -Ansatzes bedient, andere Indifferenzkurvensysteme. Meistens sind es die aus quadratischen Nutzenfunktionen abgeleiteten Kreise<sup>62</sup>, die zu zeichnen man häufig allerdings geschickterweise vermeidet.



Webersches Gesetz

Abbildung 6



Freundsche Nutzenfunktion

Abbildung 7

<sup>59</sup> Man kann aus diesem Grund übrigens auch aus (46) eine Näherung

$$S(V) \approx \mu \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\mu^2}}$$

für das Sicherheitsäquivalent bei kleinen Streuungen berechnen.

Zum Vergleich mit dem aus dem Weberschen Gesetz abgeleiteten Indifferenzkurvensystem (Abb. 6) ist in der Abb. 7 jenes der vermögensunabhängigen Risikoaversion eingezeichnet. Diese Präferenzstruktur folgt aus der Freundschen Nutzenfunktion

$$(54) \quad U(v) = -e^{-\alpha v}, \quad \alpha > 0,$$

die wir ja schon auf dem subjektiven Kontinuum in der allgemeineren Form  $(1-\varepsilon)e^{(1-\varepsilon)v}$  diskutiert haben. (Die allgemeinere Version ist hier unnötig, weil wir uns auf konkave Funktionen beschränken.) Daß umgekehrt die Freundsche Funktion die einzige ist, die mit der vermögensunabhängigen Risikoaversion vereinbar ist, folgt gleichermaßen aus Sätzen von PFANZAGL (1959a, S. 39–41, 55–57; 1959b, S. 288–292), PRATT (1964, S. 130) und SCHNEEWEISS (1967a, S. 85–87).

Für *kleine Streuungen bei beliebigen Verteilungsklassen* erhalten wir in Analogie zu (46) aus unserer Formel (II D 50):

$$(55) \quad \left. \frac{d\mu}{d\sigma} \right|_{U(\mu, \sigma)} \approx \frac{\alpha\sigma}{1 + \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}}.$$

Legt man hier den gleichen Genauigkeitsmaßstab an, wie er oben für die Formel (46) verlangt wurde, kommt man, wie im Abschnitt II D 2.2.2 schon beispielhaft gezeigt wurde, zu dem Ergebnis, daß Punkte gleicher Genauigkeit auf Parallelen zur Ordinate liegen. In der Abb. 8 wird eine solche Parallele durch die rechte Begrenzung der hervorgehobenen Fläche angegeben.

Für *große Streuungen und lineare Verteilungsklassen* folgt in Analogie zu (48) aus (II D 59):

$$(56) \quad \begin{aligned} \left. \frac{d\mu}{d\sigma} \right|_{U(\mu, \sigma)} &= -\frac{E[Z\alpha e^{-\alpha(\mu+\sigma Z)}]}{E[\alpha e^{-\alpha(\mu+\sigma Z)}]} \\ &= -\frac{E[Z\alpha e^{-\alpha\sigma Z}]}{E[\alpha e^{-\alpha\sigma Z}]}. \end{aligned}$$

In beiden Fällen hat, wie zu vermuten war, die Höhe des erwarteten Vermögens keinen Einfluß auf die Steigung der Indifferenzkurven. Die Indifferenzkurven müssen daher durch Parallelverschiebung längs der Ordinate ineinander überführbar sein.

<sup>60</sup> T. PALANDER (1957): Am ovisshet, vörderingsenheter, riskvördering och förvöntningsspridning: Appendix till Vörderbeständighet. Stockholm 1957. Hier wiedergegeben nach MAGNUSSON (1969, S. 36).

<sup>61</sup> Vgl. Fn. 59. Die dort angegebene Formel für das Sicherheitsäquivalent stimmt für  $\varepsilon=1$  (logarithmische Funktion) und  $\sigma/\mu \rightarrow 0$  mit der Palander-Magnusson-Formel überein.

<sup>62</sup> Vgl. Kap. II D 2.1.3.

### 2.3. Implikationen für die Intensität der Versicherungsnachfrage

Nach unserer aus dem Weberschen Gesetz abgeleiteten Hypothese über die Struktur der Risikopräferenz gibt es zwei Einflußfaktoren für die durch den Risikopreis  $\pi(V)$  oder die Intensität der Versicherungsnachfrage<sup>63</sup>  $g = [\pi(aq - C) + E(C)]/E(C)$  zu messende Risikobewertung: Zum einen die durch den Parameter  $\varepsilon$  erfaßte *subjektive Einstellung* zum Risiko und zum anderen das *Vermögen* des Entscheidungsträgers ( $a$ ). Damit vereint unsere Hypothese in gewisser Hinsicht Bernoullis Hypothese, nach der *nur* das Vermögen, und die in ihrer Einseitigkeit von KRELLE (1957, S. 676) zu Recht kritisierte Hypothese Freunds, nach der *nur* die subjektive Risikoneigung von Bedeutung ist.

#### 2.3.1. Der Einfluß der subjektiven Risikoneigung

Man hat hier eine klare Vermutung<sup>64</sup>: Je höher  $\varepsilon$ , desto höher sollte die Intensität der Versicherungsnachfrage sein. Daß dies in der Tat so ist, folgt daraus, daß im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm nach (52) und (53) die Indifferenzkurvensteigung auf gegebenen Ursprungsstrahlen mit  $\varepsilon$  zunimmt und somit auch der auf der Ordinate gemessene Abstand  $\pi$  von einem beliebigen Punkt  $(\mu^*, \sigma^*)$  bis zu der Stelle, wo die durch diesen Punkt laufende Indifferenzkurve in die Ordinate mündet, ansteigt. Formal ausgedrückt, finden wir wegen

$$(57) \quad \pi = \int_0^{\sigma^*/\mu^*} \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_{U(\mu, \sigma)} d\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)$$

und (52) oder (53)

$$(58) \quad \frac{d\pi}{d\varepsilon} > 0, \quad \text{also auch} \quad \frac{dg}{d\varepsilon} > 0.$$

Es sollte angemerkt werden, daß dieses Ergebnis für jede beliebige Verteilung gilt, solange sie nur auf die positive Halbachse beschränkt bleibt, denn für eine jede Verteilung ließe sich ja ein eigenes Indifferenzkurvensystem im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm konstruieren. Restriktionen bezüglich der zulässigen Verteilungsform können bei der Verwendung des  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramms erst zum Zuge kommen, wenn zwei echte Verteilungen miteinander verglichen werden und nicht wie hier eine (echte) Verteilung mit einem sicheren Vermögensbetrag.

<sup>63</sup> Vgl. Kap. II C 1.3.

<sup>64</sup> PRATT (1964) und ARROW (1965) haben den Parameter  $\varepsilon$  gerade wegen seiner Implikationen für den Risikopreis bei kleinen Streuungen zum Maß der subjektiven Risikoneigung gewählt. Vgl. dazu Gleichung (II D 55), die wegen (33) auch als  $\pi(V) \approx \sigma^2(V) \varepsilon / (2v)$  geschrieben werden kann. Daß  $\varepsilon$  dieselbe Aussagekraft bei großen Streuungen hat, ist zu erwarten, indes nicht selbstverständlich.

### 2.3.2. Der Einfluß des Vermögens

Um den Zusammenhang zwischen Vermögen und Risikobewertung darzustellen, wollen wir die aus dem Weberschen Gesetz abgeleitete Präferenzstruktur mit der Freundschen vergleichen, wie sie durch (54) angegeben wird.

Bekannt ist, daß der Risikopreis nach dem Relativitätsaxiom bei einer proportionalen Dehnung *und* Verschiebung der Endvermögensverteilung ebenfalls proportional wächst, und nach der Hypothese der vermögensunabhängigen Risikoaversion bei einer bloßen, z. B. durch die Erhöhung des Anfangsvermögens bei gleicher Verteilung des Periodeneinkommens verursachten Verschiebung ( $\sigma = \text{const.}$ ) konstant bleibt.

Unsere erste Frage richtet sich jetzt an die *Präferenzstruktur nach dem Weberschen Gesetz*: Wie ändert sich der Risikopreis im Verschiebungsfall, oder plastischer, wie ändert sich die Intensität der Versicherungsnachfrage bei einer Versicherung von gegebenem Wertumfang, wenn sich das Vermögen erhöht?

Die Antwort, die auf eine andere Weise für eine allgemeine Klasse von Nutzenfunktionen bereits von PRATT (1964, S. 130f.) und MOSSIN (1968, S. 555f.) bewiesen wurde, läßt sich leicht aus der Abb. 8 ableiten<sup>6.5</sup>.

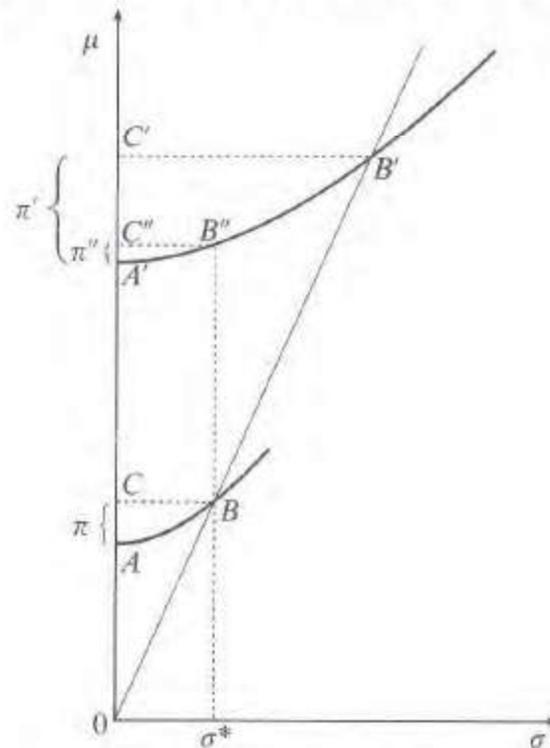


Abbildung 8

<sup>6.5</sup> Unser Beweis ist nicht etwa weniger allgemein, weil hier im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm argumentiert wird, denn er gilt wie bei Pratt und Mossin für jede beliebige Verteilungsform, sofern nur der Streubereich vom Definitionsbereich der Nutzenfunktion abgedeckt wird. Der Grund dafür ist, daß die Verteilungen in B und B' derselben linearen Klasse angehören.

Dort gehen  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$  durch Ursprungsprojektion aus  $A$ ,  $B$  und  $C$  hervor, und wir haben  $\pi'/\pi = \overline{OA'}/\overline{OA} = \overline{OB'}/\overline{OB} = \overline{OC'}/\overline{OC}$ . Geht man bei  $\sigma = \text{const.}$  von  $B$  zu  $B''$ , dann ändert sich  $\pi$  zu  $\pi''$ . Natürlich ist  $\pi'' < \pi'$ , doch darüber hinaus haben wir sogar  $\pi'' < \pi$ . In allen Punkten auf dem Kurvenstück  $AB$ , ausgenommen im Punkt  $A$  selbst, ist nämlich die Steigung größer als auf den senkrecht über ihnen liegenden Punkten auf dem Stück  $A'B''$ , so daß man durch die Integration  $\int_0^{\sigma^*} d\mu/d\sigma|_{V(\mu,\sigma)} d\sigma$  das angeführte Ergebnis oder allgemein

$$(59) \quad \frac{d\pi}{da} < 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dg}{da} < 0, \quad \sigma > 0,$$

erhält. Der Grund für die mit wachsendem  $\mu$  abnehmende Steigung ist, daß nach (47) und (49) Punkte gleicher Steigung auf Ursprungsstrahlen liegen und die Indifferenzkurven nach dem in II D 2.3 angeführten Beweis konvex sind.

Nach dem Weberschen Gesetz verringert sich also die Intensität der Nachfrage nach einer Versicherung *von gegebenem Wertumfang*, wenn das Vermögen steigt.

Damit ist die oben schon für sich als plausibel angesehene Hypothese des mit wachsendem Vermögen abnehmenden Risikopreises, die PRATT (1964) und ARROW (1965) als *abnehmende absolute Risikoaversion* bezeichnen, aus dem Weberschen Gesetz abgeleitet worden. Die Hypothese wird in der modernen risikothoretischen Literatur als „supported by everyday observation“ (ARROW (1965, S. 35)) und „intuitively appealing“ (BICKSLER (1974, S. 4)) akzeptiert, aber bereits BERNOULLI (1738, S. 25f. u. S. 42–44) hatte sie als Implikation seiner logarithmischen Nutzenfunktion hervorgekehrt, und FISHER (1906, S. 277) vertrat sie, obwohl er doch von einem ganz anderen Ansatz herkam. Die anschauliche Implikation einer mit wachsendem Vermögen abnehmenden Intensität der Versicherungsnachfrage bei einer Versicherung von gegebenem Wertumfang ist eine in der Versicherungswissenschaft häufig behauptete These<sup>66</sup>. Die Tatsache, daß es heute keine Regenschirmversicherung mehr gibt und kaum jemand noch sein Fahrrad versichert, weil es sich um einen *vergleichsweise* geringfügigen Schaden handelt, kann in diesem Zusammenhang gesehen werden.

Bemerkenswert ist nun auch, daß mit der Implikation der abnehmenden absoluten Risikoaversion das Webersche Gesetz in Verbindung mit unseren Überlegungen zu (II D 53–57) zu einer Erklärung der mehrfach behaupteten

<sup>66</sup> Vgl. z.B. FARNY (1961, S. 151). Die Hypothese der abnehmenden absoluten Risikoaversion wird in der Versicherungstheorie übrigens nicht nur für die Versicherungsnachfrager, sondern genauso für das Versicherungsunternehmen (HELTEN (1973, S. 192)) als plausibel angesehen.

Präferenz für linkssteile Verteilungen führt<sup>67</sup>. Weiterhin findet die von MOSTELLER und NOGEE (1951, S. 399f.) bei ihrer experimentellen Ermittlung einer Risikopräferenzfunktion beobachtete und als störend empfundene Tatsache, daß die jeweilige Versuchsperson ihre Risikoneigung vom „amount of money he has on hand“ abhängig macht, eine einfache Begründung<sup>68</sup>.

Um den Vergleich zwischen den rivalisierenden Präferenzhypothesen zu vervollständigen, richten wir jetzt eine Frage an die Hypothese der *vermögensunabhängigen Risikoaversion*: Wie ändert sich der Risikopreis, wenn die Endvermögensverteilung proportional gedehnt und verschoben wird? Oder: Wie ändert sich bei steigendem Vermögen die Intensität der Nachfrage nach einer Vermögensversicherung? Die Frage ist leicht an Hand der Abb. 7 zu beantworten, denn da eine jede Indifferenzkurve als das Abbild einer Funktion  $\pi(\sigma)$  aufzufassen ist, die bis auf eine den Ordinatenabschnitt messende Konstante  $S(V)$  bestimmt ist, nimmt wegen der Konvexität der Indifferenzkurven der Risikopreis überproportional zur Standardabweichung zu. Da man wegen der Vermögensunabhängigkeit des Risikopreises dieses Ergebnis auch dann erhält, wenn der Variationskoeffizient des Vermögens konstant bleibt, steigt bei wachsendem Vermögen die Intensität der Nachfrage nach einer *Vermögensversicherung*. Diese Implikation steht im Gegensatz zur Schlußfolgerung aus dem Weberschen Gesetz und könnte zur empirischen Diskriminierung zwischen den beiden rivalisierenden Hypothesen verwendet werden.

#### 2.4. Ergebnis

Durch den Einbau des durch eine Vielzahl von psychophysischen Experimenten gesicherten Weberschen Relativitätsgesetzes in die Risikopräferenztheorie läßt sich die Menge der bisher für möglich gehaltenen Präferenzstrukturen ganz erheblich eingrenzen. Folgendes wird gezeigt:

Da die von Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktion linearhomogene Sicherheitsäquivalente  $U^{-1}\{E[U(V)]\}$  implizieren muß, kommen allein die Nutzenfunktionen

$$U(v) = \begin{cases} (1-\varepsilon)v^{1-\varepsilon}, & \varepsilon \neq 1, \\ \ln v, & \varepsilon = 1, \end{cases}$$

mit  $\varepsilon$  als dem Absolutwert der Elastizität des Grenznutzens und Maß der subjektiven Risikoneigung in Frage. Diese Funktionen erfordern bei beliebigen

<sup>67</sup> Vgl. S. 121, Fn. 27; S. 123.

<sup>68</sup> MOSTELLER und NOGEE (1951, S. 400) hatten vermutet, es aber nicht zu belegen versucht, daß sich die Nutzenfunktion mit dem Vermögen ändert. Vgl. dazu S. 158ff.

gen Verteilungsklassen, jedoch kleinen Streuungen, ein homothetisches Pseudo-Indifferenzkurvensystem im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm, dessen Approximationsgüte eine Funktion des Variationskoeffizienten  $\sigma/\mu$  der Endvermögensverteilung ist. Bei links an der Stelle  $z = -\underline{k}$  beschränkten, einer linearen Klasse entstammenden Verteilungen existieren auch für große Streuungen homothetische Indifferenzkurven im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm, solange  $\mu/\sigma > \underline{k}$ . Sie sind ein exaktes Abbild der von Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktionen. Die üblichen Eigenschaften der Konvexität und des senkrechten Einmündens in die  $\mu$ -Achse bleiben erhalten. Wichtige Implikationen für die Risikobewertung sind, daß die Intensität der Versicherungsnachfrage

- mit der durch  $\varepsilon$  gemessenen subjektiven Risikoneigung steigt,
- bei einer Vermögensversicherung vom Niveau des Vermögens unabhängig ist und
- bei einer Versicherung von gegebenem Wertumfang mit wachsendem Vermögen abnimmt.

## Abschnitt B

### Die Mehr-als-er-hat-kann-man-ihm-nicht-nehmen-Regel

Bislang haben wir unter der Annahme argumentiert, daß der Streubereich der zu bewertenden Wahrscheinlichkeitsverteilung den Definitionsbereich der Nutzenfunktion nicht überschreitet. Negative Ausprägungen der Vermögensverteilung waren also ausgeschlossen. Entsprechend waren z. B. links beschränkte lineare Verteilungen mit  $\mu/\sigma < \underline{k}$  und links unbeschränkte Verteilungen generell verboten.

Dieses Verbot mag als sehr restriktiv erscheinen, wenn man bedenkt, daß damit auch die Normalverteilung ausgeschlossen wurde, der wegen ihrer Approximationseigenschaft für die Verteilung von Summenvariablen in der Praxis eine beträchtliche Bedeutung zukommt. Man darf aber die Grenzen der Approximationsgüte nicht übersehen. Wie groß die Ähnlichkeit der in der Wirklichkeit vorkommenden Verteilungen mit der Normalverteilung auch immer sein mag, in mindestens einem Punkt gibt es einen Unterschied: Wegen der simplen Regel, daß man jemandem nicht mehr nehmen kann als er hat, bleibt das *faktische* Vermögen auf die positive Halbachse (einschließlich des Nullpunktes) beschränkt. Zwar gibt es genug Menschen, die sich mehr Schulden aufgehäuft haben, als sie zeitlebens abtragen können – Personen also, deren *juristisches* Nettovermögen unter Einschluß des Human-

kapitals negativ ist – doch seit es den Pranger nicht mehr gibt, ist der nicht tilgbare Teil der Schuld faktisch nicht mehr existent<sup>1, 2, 3</sup>.

Nennen wir die faktische Vermögensverteilung  $V^f$ , und die juristische  $V$ , so gilt offenbar die folgende Beziehung

$$(1) \quad V^f = \begin{cases} V, & V \geq 0, \\ 0, & V \leq 0. \end{cases}$$

Sie impliziert bereits eine vollständige Präferenzstruktur über juristische Verteilungen, deren Eigenschaften jetzt aufgedeckt werden sollen. Es wird sich als zweckmäßig erweisen, bei dieser Untersuchung zwischen mäßiger ( $\varepsilon < 1$ ) und starker ( $\varepsilon \geq 1$ ) Risikoaversion zu unterscheiden, weil die Nutzenfunktion im ersten Fall unten beschränkt ist, im zweiten Fall jedoch nicht.

### 1. Die vollständige Präferenzordnung bei mäßiger Risikoaversion ( $0 < \varepsilon < 1$ ): Der wahre Grund der Risikovorliebe

#### 1.1. Die abgeleitete Nutzenfunktion für juristische Verteilungen

Mit Hilfe der in (1) angegebenen Information und unter Verwendung der Weber-Funktion (A 34) für  $\varepsilon < 1$ , nennen wir sie jetzt  $U^f(\cdot)$ , kann man die folgende *abgeleitete* Nutzenfunktion  $U(\cdot)$  konstruieren:

$$(2) \quad U(v) = \begin{cases} U^f(v) = v^{1-\varepsilon}, & v \geq 0, \\ U^f(0) = 0, & v \leq 0, \end{cases}$$

mit

$$U'(v) = (1-\varepsilon)v^{-\varepsilon} \quad \text{und} \quad U''(v) = -\varepsilon(1-\varepsilon)v^{-(1+\varepsilon)}, \quad v > 0,$$

und mit

$$U'(v) = U''(v) = 0, \quad \text{wenn} \quad v < 0.$$

<sup>1</sup> Damit läßt sich übrigens ein formaler Test, den SCHNEEWEISS (1964; 1967a, S. 129–160) entwickelt hat, um die Schnittmenge von Präferenzstrukturen herauszufinden, die auf der Klasse der Normalverteilungen sowohl im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm als auch mit Hilfe einer von Neumann-Morgenstern-Funktion darstellbar sind, nicht mehr anwenden. Eine der Voraussetzungen für die Anwendung dieses Tests,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x)e^{-\alpha x^2} > -\infty$  (vgl. 1967a, S. 131), ist hier nicht erfüllt.

<sup>2</sup> Man beachte das Nettokonzept bei der zu Anfang dieses Kapitels gegebenen Vermögensdefinition. Danach bedeutet der völlige Vermögensverlust, daß dem Entscheidungsträger zeitlebens gerade noch das Existenzminimum verbleibt. Das ist wegen der in Ländern mit entwickelten Rechtsnormen üblichen Pfändungsgrenzen, die das Existenzminimum sichern sollen, durchaus realistisch.

<sup>3</sup> Die Bedeutung der unteren Vermögensschranke für die Risikobewertung ist auch von SEIDL (1972, S. 443–445) betont worden. Seidl hat allerdings nicht versucht, diese Schranke in einen formalen entscheidungstheoretischen Ansatz zu integrieren, wie wir es tun werden.

Da die abgeleitete Funktion  $U(\cdot)$  die juristische Verteilung  $V$  gerade so bewertet wie die originäre Funktion  $U^f(\cdot)$  die faktische Verteilung  $V^f$ , gilt

$$(3) \quad E[U(V)] = E[U^f(V^f)].$$

$U(\cdot)$  ist wirklich nur eine mathematische Hilfskonstruktion, die all ihre Informationen aus  $U^f(\cdot)$  bezieht. So braucht es uns z. B. nicht zu stören, daß  $U(v)$  für  $v \leq 0$  dem Sättigungsaxiom widerspricht.  $U^f(v^f)$  steht ja für alle zulässigen Werte von  $v^f$  im Einklang mit diesem Axiom, und das genügt.

In Analogie zur Abb. 10 im Abschnitt II C 1.2 zeigt die nachfolgende Abb. 9 an einem Beispiel die Auswirkung der *Mehr-als-er-hat-kann-man-ihm-nicht-nehmen-Regel*, oder kurz: *Maehkminn-Regel*, auf die Intensität der Versicherungsnachfrage, wenn die juristische Schadensverteilung  $C = \begin{pmatrix} w & 1-w \\ \ell & 0 \end{pmatrix}$  wegen  $\ell > aq$  die juristische Vermögensverteilung auch über die negative Halbachse streuen läßt, wie es z. B. bei Haftpflichtschäden möglich ist.

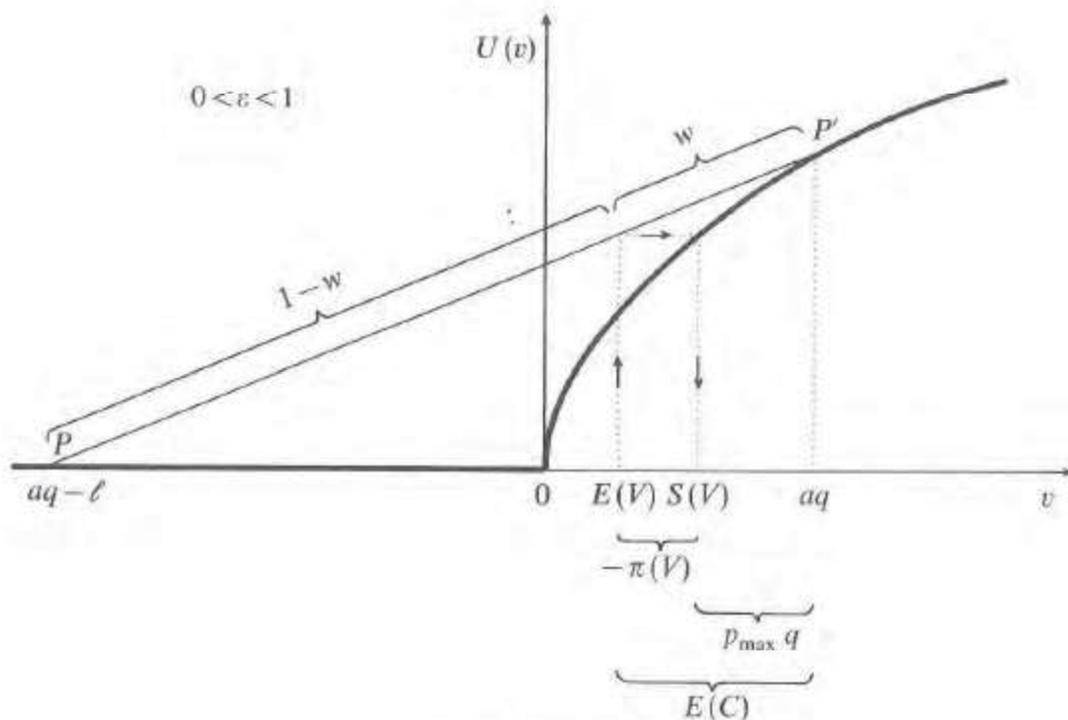


Abbildung 9

Das Bemerkenswerte an dieser Abbildung ist, daß der durch die Maehkminn-Regel verursachte Knick in der abgeleiteten Nutzenfunktion eine Risikovorliebe andeutende Konvexität verursacht: Bei einem genügend

hohen Schaden  $\ell$  wird das Sicherheitsäquivalent  $S(V)$  größer als das erwartete Vermögen, so daß wir einen negativen Risikopreis  $\pi$  erhalten und die Intensität der Versicherungsnachfrage

$$(4) \quad g = \frac{P_{\max} q}{E(C)} < 1$$

wird.

Eine Implikation für den Abschluß von Haftpflichtversicherungen liegt auf der Hand: Da die Versicherungsunternehmen mindestens einen Preis in Höhe des Erwartungsschadens verlangen müssen<sup>4</sup>, ist es für einen Versicherungsnehmer mit  $g < 1$  vorteilhaft, unversichert zu bleiben, und dies, obwohl er von seiner subjektiven Neigung her durchaus risikoscheu ist. Der Grund dafür ist, daß ohne Versicherungsabschluß der Teil des Schadens, der das eigene Vermögen übersteigt, nicht getragen zu werden braucht, während beim Versicherungsabschluß natürlich auch für die Abdeckung dieses Teilschadens eine Prämie gezahlt werden muß. Die Auswirkung dieser individuell durchaus vernünftigen Entscheidung gegen den Versicherungsabschluß hat in vielen Ländern zur Einführung des Versicherungszwangs für Haftpflichtversicherungen geführt.

Neben dem Versicherungsbeispiel, auf das wir später noch ausführlich zu sprechen kommen werden<sup>5</sup>, gibt es noch andere Beispiele für die Implikationen der Maehkminn-Regel. So muß man schließen, daß Unternehmen bei der Auswahl verschiedener Produktionsverfahren vor Risiken, die Schäden im vielfachen Umfang des Eigenkapitals mit sich bringen können, unter Umständen nicht mehr Angst haben als vor kleineren Schäden, die auch den Ruin bedeuten, denn mehr als ruiniert werden können sie ja nicht. Daß hier Fehlallokation bewirkende externe Effekte drohen, liegt auf der Hand. Eine andere Implikation, die ebenfalls noch im Detail zu erörtern sein wird<sup>6</sup>, zeigt sich für die Terminspekulation *à la baisse*, bei der der mögliche Schaden das Vermögen des Spekulanten weit übersteigen kann. Nach der Maehkminn-Regel kann es durchaus rational sein, von zwei Kontrakten jenen mit der höheren Varianz und dem kleineren Erwartungsgewinn vorzuziehen. Sind es nicht die Spekulanten, denen man häufig Risikovorliebe nachsagt?

Bei diesen Bemerkungen zur praktischen Relevanz der geknickten Nutzenfunktion für juristische Verteilungen wollen wir es derweil bewenden lassen.

<sup>4</sup> Vgl. Kap. II C 1.2 und 1.3.

<sup>5</sup> Im Kap. V C 1 und 2.3.

<sup>6</sup> Im Kap. V B 4.

### 1.2. Die Indifferenzkurven im $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm für lineare Verteilungsklassen

Es sollen in diesem Abschnitt die zur Nutzenfunktion (2) gehörenden Indifferenzkurven im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm abgeleitet werden, damit die Auswirkung der Maehkminn-Regel auch für andere Verteilungen als die oben behandelte, freilich für den Versicherungsfall als Approximation gut geeignete Zwei-Punkt-Verteilung untersucht werden kann. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf solche Verteilungen, die in der Gestalt kontinuierlicher Dichtefunktionen vorliegen<sup>7</sup>. Zudem betrachten wir nur Verteilungen, die allesamt derselben (beliebigen) linearen Klasse<sup>8</sup> mit  $f_z(z; 0, 1) \equiv f_z(z)$ ,  $Z \equiv (V - \mu)/\sigma$ , entstammen, die links bei  $z = -\underline{k}$ ,  $\underline{k} \leq \infty$ , und rechts bei  $z = \bar{k}$ ,  $\bar{k} \leq \infty$ , beschränkt ist. Es sei unterstellt, daß die Verteilungen, außer vielleicht bei  $z = \bar{k}$ , eine endliche Dichte aufweisen.

Eine unmittelbare Folgerung aus dieser Charakterisierung der Verteilungsklasse ist, daß es im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm eine Ursprungsgerade  $\mu = -\bar{k}\sigma$  gibt (Vgl. Abb. 11), oberhalb derer Indifferenzkurven liegen, die alle in den positiven Teil der  $\mu$ -Achse einmünden, da eine jede Verteilung, die mit einer von Null verschiedenen Dichte positive Endvermögensausprägungen aufweist, ein positives Sicherheitsäquivalent besitzt. (Da die faktische Verteilung bei  $v=0$  begrenzt ist, ist  $v=0$  das kleinstmögliche Sicherheitsäquivalent.) Unterhalb der Grenze  $\mu = -\bar{k}\sigma$  schließt sich ein Indifferenzfeld an, da alle dort abzubildenden Verteilungen ausschließlich über der negativen Vermögensachse streuen, für die  $U(v)$  konstant ist, weil diese Verteilungen mit Sicherheit ein faktisches Vermögen von 0 bescheren.

Die Steigung der Indifferenzkurven läßt sich wegen der Kontinuität von  $U(v)$  im Bereich  $0 \leq v \leq \infty$  in gewohnter Weise nach der Tobin-Formel (II D 60) errechnen<sup>9</sup>. Die Frage ist nur, ob das mit (A 48) gefundene Ergebnis erhalten bleibt, daß es bei der Steigung nur auf die Relation  $\mu/\sigma$  ankommt. Sie kann bejaht werden, denn die dort implizit benutzte Beziehung

<sup>7</sup> Nötigenfalls ist zuvor eine Approximation der diskreten durch eine kontinuierliche Verteilung vorzunehmen. Vgl. dazu Kap. I C 3.5.

<sup>8</sup> Die Methode der Punktapproximation kann jetzt, wenigstens ohne weitere Approximationen zu implizieren, nicht mehr angewendet werden, da bei Ausprägungen der Wahrscheinlichkeitsverteilung, die um mehr als 50% unterhalb des Mittelwertes liegen, die Konvergenz der Taylor-Reihe nicht mehr gewährleistet ist. Vgl. Kap. II D 2.2.2.

<sup>9</sup> Man beachte, daß die hierzu nötige Differentiation unter dem Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_z(z) U(\mu + \sigma z) dz$$

trotz der Sprungstelle, die die Grenznutzenfunktion bei  $v=0$  wegen des Knicks von  $U(v)$  aufweist, die Formel nicht verändert. Zum mathematischen Vorgehen vgl. Anhang (3) zu diesem Kapitel, wo für ein anderes Problem unter einem Integral über der unstetigen Grenznutzenfunktion differenziert wird. Formel (5) würde erst dann nicht mehr gelten, wenn auch  $U(v)$  unstetig ist.

$U'(\mu + \sigma z) = (1 - \varepsilon) \sigma^{-\varepsilon} U'(\mu/\sigma + z)$  gilt nicht nur bei  $\mu + \sigma z > 0$ , sondern auch bei  $\mu + \sigma z < 0$ , weil dann gemäß (2)  $U'(\mu + \sigma z) = 0$  vorliegt. Es gilt also auch bei unbeschränkten juristischen Verteilungen die Formel

$$(5) \quad \left. \frac{d\mu}{d\sigma} \right|_{U(\mu, \sigma)} = - \frac{E \left[ Z U' \left( \frac{\mu}{\sigma} + Z \right) \right]}{E \left[ U' \left( \frac{\mu}{\sigma} + Z \right) \right]}.$$

Daher ist das Indifferenzkurvensystem auch noch im Bereich von Verteilungen, die auf die negative Vermögenshalbachse hinüberstreuen, *homothetisch*. Im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm wird dieser Bereich bekanntlich durch die Gerade  $\mu = \bar{k}\sigma$  nach oben begrenzt (vgl. Abb. 6 und Abb. 10).

Aus der Tatsache, daß alle Verteilungen mit  $\mu/\sigma > \bar{k}$  ein positives Sicherheitsäquivalent haben, und weil das gesamte Indifferenzkurvensystem homothetisch ist, folgt bereits, daß die Indifferenzkurven teilweise eine negative, auf Risikovorliebe hinweisende Steigung haben müssen. In Anbetracht der durch die Maehkminn-Regel verursachten Konvexität der abgeleiteten Nutzenfunktion  $U(v)$  ist das ja auch gar nicht anders zu erwarten. Bestätigt wird dieses Ergebnis durch einen Blick auf (5): Nach diesem Ausdruck ist die Steigung im Bereich  $\mu/\sigma > \bar{k}$  deshalb positiv, weil wegen des fallenden Grenznutzens negativen Ausprägungen von  $Z$  ein größeres Gewicht als positiven zukommt. Wenn nun  $\mu/\sigma$  verkleinert wird, so daß  $\mu/\sigma < \bar{k}$ , dann wird diese Regel durchbrochen, da die am stärksten negativen Werte von  $z$  das geringste Gewicht erhalten. Es hat wegen  $U'(v) = 0$ , wenn  $v < 0$ , gerade den Wert 0, während ja alle anderen Gewichte wegen des positiven Grenznutzens positiv sind, wenn nur auch die Dichte positiv ist. Die Auswirkung auf die Indifferenzkurvensteigung ist unmittelbar ersichtlich, wenn  $\mu/\sigma = 0$ : Da alle negativen Ausprägungen von  $Z$  mit einem kleineren Gewicht als alle positiven versehen werden, also nur Ausprägungen von  $Z$  im Bereich  $0 = \mu/\sigma \leq z \leq \bar{k}$  wirklich bei der Durchschnittsbildung verwendet werden, ist  $-\bar{k} \leq d\mu/d\sigma|_{U(\mu, \sigma)} \leq 0$ . Zu dem noch schärferen Ergebnis  $-\bar{k} \leq d\mu/d\sigma|_{U(\mu, \sigma)} < 0$  kommt man, wenn  $0 < -\mu/\sigma \leq z \leq \bar{k}$ .

Die Frage ist nun allerdings, wo innerhalb der abgesteckten Grenzen das Steigungsmaß liegt. Schreibt man (5) unter Verwendung der standardisierten Dichtefunktion  $f_z(z)$  und unter Beachtung von  $U'(v) = 0$ , wenn  $v < 0$ , und  $U'(v) = (1 - \varepsilon) v^{-\varepsilon}$ , wenn  $v > 0$ , einmal explizit als

$$(6) \quad \left. \frac{d\mu}{d\sigma} \right|_{U(\mu, \sigma)} = - \frac{\int_{-\mu/\sigma}^{\infty} z f_z(z) (1 - \varepsilon) \left( \frac{\mu}{\sigma} + z \right)^{-\varepsilon} dz}{\int_{-\mu/\sigma}^{\infty} f_z(z) (1 - \varepsilon) \left( \frac{\mu}{\sigma} + z \right)^{-\varepsilon} dz},$$

so könnte man wegen<sup>10</sup>  $\lim_{z \rightarrow -\mu/\sigma+} (\mu/\sigma + z)^{-\varepsilon} = \infty$  vermuten, daß das Gewicht für  $z = -\mu/\sigma$  alle anderen dominiert, so daß generell  $d\mu/d\sigma|_{U(\mu,\sigma)} = \mu/\sigma$ , wenn nur  $f_z(-\mu/\sigma) > 0$ . Das Indifferenzkurvensystem würde in diesem Fall im Bereich  $-\bar{k} < \mu/\sigma < \bar{k}$  durch eine Schar von Ursprungsstrahlen gekennzeichnet. Im Anhang 2 wird diese Vermutung widerlegt. (Man substituiere<sup>11</sup>  $A \equiv d\mu/d\sigma|_{U(\mu,\sigma)}$ ,  $\mu/\sigma \equiv y$ ,  $z \equiv w$ ,  $\varepsilon \equiv \Theta$ .) Solange  $0 < \varepsilon < 1$ , wie wir es ja unterstellt haben, ist

$$(7) \quad \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_{U(\mu,\sigma)} < \frac{\mu}{\sigma}, \quad \text{wenn} \quad \frac{\mu}{\sigma} > -\bar{k} \quad \text{und} \quad \infty > f_z \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) > 0.$$

Dieses Ergebnis gilt *a fortiori*, wenn  $f_z(-\mu/\sigma) = 0$ , etwa weil die betrachtete Verteilung multimodal ist oder mit  $\mu/\sigma > \bar{k}$  nur über der positiven Halb-achse streut<sup>12</sup>, denn dann käme das Gewicht  $\lim_{z \rightarrow -\mu/\sigma+} (\mu/\sigma + z)^{-\varepsilon}$  ohnehin nicht zum Zuge.

Was die Untergrenze  $(-\bar{k})$  der Steigung betrifft, liegt es auf der Hand, daß sie nie erreicht wird, solange Ausprägungen von  $Z$  im Bereich  $-\mu/\sigma \leq z < \bar{k}$  eine strikt positive Dichte aufweisen und  $\mu/\sigma > -\bar{k}$ . Wenn jedoch  $\mu/\sigma \rightarrow -\bar{k}$ , dann verengt sich der Streubereich der zur Durchschnittsbildung verwendeten  $z$ -Werte immer mehr und wir müssen schließen, daß<sup>13</sup>

$$(8) \quad \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_{U(\mu,\sigma)} > -\bar{k}, \quad \lim_{\mu/\sigma \rightarrow -\bar{k}} \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_{U(\mu,\sigma)} = -\bar{k}.$$

Die Indifferenzkurven verlaufen also für genügend kleine  $\mu/\sigma$  annähernd parallel zur unteren Begrenzungslinie des Indifferenzkurvenfeldes.

Weitere Informationen über den Indifferenzkurvenverlauf erhält man, wenn man einmal (5) nach  $\mu/\sigma$  ableitet, um die Wölbung der Indifferenzkur-

<sup>10</sup> Um die Grenzwertbildung „von oben“ und „von unten“ zu unterscheiden, benutzen wir ein nachgestelltes „+“ bzw. „-“.

<sup>11</sup> In den Anhängen werden zum Teil andere Symbole verwendet, weil auf die dort behandelten mathematischen Probleme in verschiedenen Zusammenhängen zurückgegriffen wird.

<sup>12</sup> Das wurde in (A 49)–(A 51) ja bereits gezeigt.

<sup>13</sup> Würde man sich statt auf Dichtefunktionen auf diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen beziehen, dann könnte die Steigung bereits für  $\mu/\sigma > -\bar{k}$  den Wert  $-\bar{k}$  annehmen. Die Voraussetzung hierfür ist, daß die Ausprägung  $z = -\bar{k}$  mit positiver Wahrscheinlichkeit auftritt und weitere Ausprägungen im Bereich  $-\mu/\sigma \leq z < \bar{k}$  unmöglich sind. Bei einer Zwei-Punkt-Verteilung hieße das gar, daß die Indifferenzkurven im gesamten Bereich unterhalb der  $\mu = \bar{k}\sigma$ -Geraden die Steigung  $-\bar{k}$  haben. Die diskreten Verteilungen und die für sie konstruierbaren Indifferenzkurvensysteme lassen sich aber durch die hier verwendeten kontinuierlichen Verteilungen beliebig genau approximieren.

ven zu überprüfen. Das Ergebnis der im Anhang 3 vorgenommenen Berechnung lautet:

$$(9) \quad \frac{d \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_{U(\mu, \sigma)}}{d \frac{\mu}{\sigma}} = \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{\beta} \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} \left[ f_z \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) - (1-\Gamma) f_z(z) \right] \left( \frac{\mu}{\sigma} + z \right)^{-(1+\varepsilon)} dz \left( \frac{\mu}{\sigma} - \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_{U(\mu, \sigma)} \right),$$

$$1 > \Gamma \geq 0, \quad \text{wenn } f_z \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) = 0,$$

$$\Gamma = 0, \quad \text{wenn } f_z \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) > 0,$$

$$\infty > \beta > 0.$$

Da  $\beta$ ,  $\varepsilon(1-\varepsilon)$  und wegen (7) auch der Klammerausdruck hinter dem Integral strikt positiv und endlich sind, braucht uns nur das Integral selbst zu interessieren.

Wie im Anhang 4 gezeigt wird, ist es endlich, wenn, wie unterstellt,  $0 < \varepsilon < 1$ . (Man substituiere das Integral für  $A$  und setze  $\mu/\sigma \equiv y$ ,  $z \equiv w$ ,  $f_z(-\mu/\sigma) - (1-\Gamma)f_z(z) \equiv f_w(w)$ ,  $(1+\varepsilon) \equiv \Theta$ .) Daraus folgt, daß die Indifferenzkurven überall glatt verlaufen, was die vielleicht gehegte Vermutung, wenigstens auf der Geraden  $\mu = \underline{k}\sigma$  müßten sie einen Knick aufweisen, „weil auch die Nutzenfunktion  $U(v)$  bei  $v=0$  geknickt ist“, widerlegt.

Wichtig ist auch das Vorzeichen des Integrals, da ein positives Konkavität, ein negatives Konvexität und ein Integralwert von 0 Linearität der Indifferenzkurven anzeigt. Im Fall  $\mu/\sigma > \underline{k}$  ist es wegen  $f_z(-\mu/\sigma) = 0$  und  $\Gamma < 1$  negativ, was nur das im Kapitel II D 2.3 schon erfahrene Ergebnis der Konvexität bestätigt. Aber bemerkenswerterweise bleibt es bei einem durch  $f_z(-\underline{k}+) = f_z(-\underline{k}-)$  gekennzeichneten normalen Verlauf der Dichtefunktion auch für  $\underline{k} - \mu/\sigma > 0$  noch negativ, wenn nur diese Differenz genügend klein ist: Die Indifferenzkurven verlaufen also auch noch in einem gewissen Bereich unterhalb der Geraden  $\mu = \underline{k}\sigma$  normal. Bei ausgearteten „abgeschnittenen“ Dichtefunktionen mit  $f_z(-\underline{k}+) > 0$  und  $f_z(-\underline{k}-) = 0$  kann freilich unmittelbar unterhalb dieser Geraden ein konvexer Bereich beginnen, wenn nur  $f_z(-\underline{k}+)$  groß genug ist.

Auf jeden Fall muß aber auch bei normalen Verteilungen mit sinkendem  $\mu/\sigma$  das Integral positiv werden, da spätestens dann, wenn der Modus der zu bewertenden Vermögensverteilung beim Ursprung der Vermögensachse liegt,  $f_z(-\mu/\sigma) - f_z(z) > 0$ ,  $\forall z > -\mu/\sigma$ . (Bei linkssteilen Verteilungen ist das noch bei  $\mu/\sigma > 0$  der Fall.) Wenn allerdings eine multimodale Verteilung vorliegt, dann können die Indifferenzkurven aus abwechselnd konvexen und

konkaven Stücken zusammengesetzt sein. Sicher ist dann nur, daß für genügend kleine  $\mu/\sigma$ , nämlich dann, wenn kein Modus mehr über der positiven Vermögenshalbachse liegt, die Indifferenzkurven konkav sind.

Die einfachste Version eines für den Normalfall zu erwartenden Indifferenzkurvensystems wird in der Abb. 10 dargestellt, wobei die oben fundierten Eigenschaften gesondert gekennzeichnet sind.

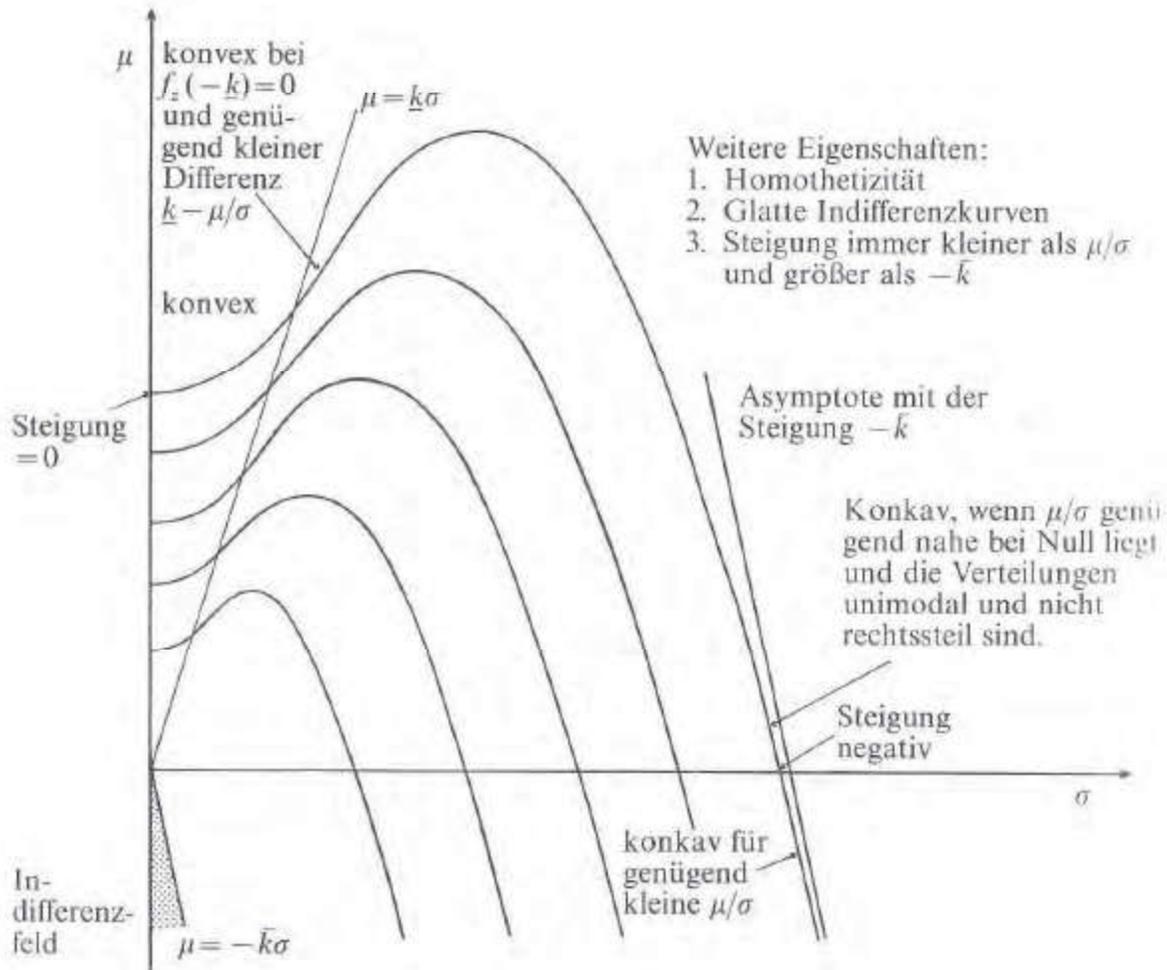


Abbildung 10

Bisher haben wir nur den Fall links beschränkter Verteilungen untersucht. Damit könnte man es im Prinzip bewenden lassen, denn bei vielen Problemen ist die juristische Verteilung recht frühzeitig links beschränkt, weil das jeweils eingesetzte Kapital eine Obergrenze des möglichen Verlustes markiert. Zu nennen ist hier z.B. die kapitalbindende Spekulation, das Halten von Aktien oder die Beteiligung an einer GmbH. Es gibt aber auch andere Entscheidungssituationen, wie die Terminspekulation *à la baisse* oder den Abschluß einer Haftpflichtversicherung, bei denen sehr weit links hinausgezogene Verteilungen zu bewerten sind, so daß die links unbeschränkte Verteilung als Grenzfall interessant wird. Darüber hinaus ist es natürlich vor

allem die wegen ihrer Approximationseigenschaft für Summenvariable so wichtige Normalverteilung, die die Betrachtung links unbeschränkter Verteilungen rechtfertigt.

Aus der vorangegangenen Analyse folgt für  $k \rightarrow \infty$  bereits, daß sich an der für kleine  $\mu/\sigma$  negativen Steigung der Indifferenzkurven nichts ändern kann. Die Frage ist indes, wie die Indifferenzkurven in der Nähe der Ordinate verlaufen. Münden sie noch senkrecht in die Ordinate ein und wenn ja, gibt es für kleine Variationskoeffizienten der Endvermögensverteilung noch einen Risikofurcht anzeigenden Bereich konvexer Indifferenzkurven, obwohl doch selbst für die aller kleinste Streuung die bei  $v \rightarrow 0$  unendlich werdende 1. und 2. Ableitung der Nutzenfunktion ins Spiel kommt?

Der erste Teil der Frage ist leicht zu beantworten, denn da in dem hier vorliegenden Fall  $0 < \varepsilon < 1$  bekanntlich<sup>14</sup> Zähler und Nenner von (5) endlich sind, kann man die Unstetigkeitsstelle bei  $U'(0)$  durch einen stetigen Grenznutzenverlauf beliebig genau approximieren. Da für stetige Grenznutzenverläufe der Grenzübergang für den Zähler den Wert  $E(Z)U'(\mu) = 0$  und für den Nenner den Wert  $U'(\mu)$  bringt<sup>15</sup> und darüber hinaus das Gewicht der Approximationsstelle verschwinden läßt, bleibt es dabei, daß die Indifferenzkurven senkrecht in die  $\mu$ -Achse einmünden<sup>16</sup>:

$$(10) \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_{U(\mu, \sigma)} = 0$$

<sup>14</sup> Das folgte z. B. aus der im Anhang (2) vorgenommenen Berechnung der Gl. (6).

<sup>15</sup> Vgl. dazu SCHNEEWEISS (1967a, S. 128f.).

<sup>16</sup> Daß die Beseitigung der Unstetigkeitsstelle einen verschwindenden Einfluß erhält, kann man anhand des Ausdruckes  $A$  im Anhang (2) zeigen, wenn man für Gleichung (5) im Text  $y \equiv \mu/\sigma$ ,  $z \equiv w$ ,  $\varepsilon \equiv \theta$  substituiert und den Kurvenverlauf im Intervall  $-y$  bis  $-y + A$  mit Hilfe einer Funktion  $\chi(w)$  verstetigt, wobei

$$\int_{-y}^{-y+A} f_w(w) \chi(x+w) dw = \int_{-y}^{-y+A} f_w(w) (x+w)^{-\theta} dw$$

gelte, damit der Wert für  $\gamma$  in Gleichung (9) des Anhangs (2) unverändert bleibt. War zuvor durch eine geeignete Wahl von  $A$  dafür gesorgt worden, daß  $\gamma$  genügend nahe bei 1 liegt, so ist nach – wie vor – dieser Modifikation, die ja nur den Wert für  $\lim_{x \rightarrow y+} \alpha$  in einem endlichen Ausmaß ändert, gemäß Gleichung (11) und (3) des Anhangs  $A \approx \lim_{x \rightarrow y+} \beta$ , wobei eine beliebige Genauigkeit erzielt werden kann. Aber selbst, wenn hier auf größtmögliche Genauigkeit verzichtet wird, so führt der anschließende Grenzübergang  $y \rightarrow \infty$  ( $\sigma \rightarrow 0$ ) dazu, daß  $\lim_{x \rightarrow y+} \gamma$  gegen 1 geht, so daß sich die Frage der Stetigkeit oder Unstetigkeit im Bereich  $-y$  bis  $-y + A$  als belanglos erweist, solange nur  $0 < \theta < 1$ . Im Falle  $\theta \geq 1$  gilt wegen Gleichung (21) des Anhangs jedoch immer  $\lim_{x \rightarrow y+} \gamma = 0$ , so daß die obige Argumentation nicht mehr aufrecht erhalten werden kann. Es sollte noch angemerkt werden, daß die Argumentation ohne Schwierigkeiten auf beliebige stetige Nutzenfunktionen ohne Knick verallgemeinert werden kann, wenn nur  $\mu$  nicht auf einem Knick liegt.

Um die zweite Frage zu beantworten, müssen wir uns überlegen, wie sich das Integral ( $\int$ ) in (9) bei  $\mu/\sigma \rightarrow \infty$  entwickelt. Eine Risikofurcht anzeigende Konvexität liegt ja vor, wenn es negativ wird. Nach bloßem Augenschein ist die Antwort nicht zu geben, denn zwar geht  $f_z(-\mu/\sigma)$  gegen 0, was für sich genommen das Integral verkleinert, doch verschiebt sich auch die Dichtefunktion hin zu niedrigeren Werten von  $(\mu/\sigma + z)^{-(1+\epsilon)}$ , was womöglich die negativen Teilstücke des Integrals absolut stärker verkleinert als die positiven, also für sich genommen das Integral vergrößert. Letzteres ist sicherlich dann der Fall, wenn die Verteilung so geartet ist, daß

$$\frac{df_z\left(\frac{-\mu}{\sigma}\right)}{d\frac{\mu}{\sigma}} \geq 0,$$

und es ein  $z = \tilde{z}$  gibt, so daß  $f_z(z) \geq f_z(-\mu/\sigma)$  für  $-\mu/\sigma < z \leq \tilde{z}$ , und  $f_z(z) < f_z(-\mu/\sigma)$  für  $z > \tilde{z}$ .

Wenn der Erwartungswert für die Verteilungen aus der vorliegenden linearen Klasse existieren soll, dann muß  $f_z(-\mu/\sigma)$  bei  $\mu/\sigma \rightarrow \infty$  irgendwann abnehmen. Wir wollen das unterstellen und darüber hinaus annehmen, daß die Abnahme jenseits eines  $z = \tilde{z}$  monoton ist:

$$(11) \quad f'_z(z) \geq 0 \quad \text{für} \quad z < \tilde{z}.$$

Das impliziert unter anderem  $f_z(z) > 0$  für  $z < \tilde{z}$  und somit auch  $\Gamma = 0$  für  $-\mu/\sigma < \tilde{z}$ .

Nun unterstellen wir, daß in einer Ausgangslage die Relation  $\mu/\sigma$ , die wir jetzt der Kürze halber durch den Parameter  $\rho$  ersetzen, um den Betrag  $x + y$ ,  $0 < x < \infty$ ,  $0 < y < \infty$ , erhöht wird, so daß das Integral aus (9) die folgende Form annimmt:

$$(12) \quad \int = \int_{-\rho-x-y}^{-\rho} [f_z(-\rho-x-y) - f_z(z)] (\rho+x+y+z)^{-(1+\epsilon)} dz \\ + f_z(-\rho-x-y) \int_{-\rho}^{\infty} (\rho+x+y+z)^{-(1+\epsilon)} dz \\ - \int_{-\rho}^{\infty} f_z(z) (\rho+x+y+z)^{-(1+\epsilon)} dz.$$

Unterstellen wir weiterhin, daß in der Ausgangslage  $-\mu/\sigma = -\rho = \tilde{z}$  gilt, dann kann das erste Integral des Ausdrucks (12) niemals positiv sein.

Im nächsten Schritt betrachten wir die folgende Ungleichung:

$$(13) \quad \left(\frac{x+y}{x}\right)^{-(1+\varepsilon)} \int_{-\rho}^{\infty} f_z(z) (\rho+x+z)^{-(1+\varepsilon)} dz \\ < \int_{-\rho}^{\infty} f_z(z) (\rho+x+y+z)^{-(1+\varepsilon)} dz.$$

Sie erklärt sich daraus, daß

$$(14) \quad \frac{x+y}{x} (\rho+x+z) = \rho+x+y+z, \quad \text{wenn } z = -\rho,$$

$$(15) \quad \frac{x+y}{x} (\rho+x+z) > \rho+x+y+z, \quad \text{wenn } z > -\rho,$$

und  $(\cdot)^{-(1+\varepsilon)}$  eine fallende Funktion ist. Lassen wir in (12) das erste Integral fort und beachten wir (13), so gilt sicherlich die Ungleichung

$$(16) \quad \int_{-\rho-x-y}^{\infty} f_z(z) (\rho+x+y+z)^{-(1+\varepsilon)} dz \\ - \left(\frac{x+y}{x}\right)^{-(1+\varepsilon)} \int_{-\rho}^{\infty} f_z(z) (\rho+x+z)^{-(1+\varepsilon)} dz.$$

Wird die rechte Seite dieser Ungleichung bei  $y \rightarrow \infty$  negativ, so haben die Indifferenzkurven einen konvexen Bereich in der Nähe der  $\mu$ -Achse. Das passiert freilich nur, wenn der erste Summand in (16) schneller als der Absolutwert des zweiten gegen 0 schrumpft. Es ist nicht der Fall, wenn  $f_z(-\rho-x-y)$  konstant bleibt, doch tritt es ein, wenn

$$(17) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f_z(-\rho-x-y)}{(x+y)^{-(1+\varepsilon)}} = 0.$$

Als Beispiel betrachte man eine Normalverteilung mit  $f_z(z) = (1/\sqrt{2\pi}) e^{-0,5z^2}$ ; deren Dichte konvergiert offenkundig schneller als  $e^{-0,5|z|}$  und wegen  $e^{-0,5z} = e^{-0,5|-\rho-x-y|} = e^{-0,5(\rho+x)} e^{-0,5y}$  auch schneller als  $e^{-0,5y}$ . Damit erfüllt sich (17) für die Normalverteilung, denn es ist

$$\frac{e^{-0,5y}}{(x+y)^{-(1+\varepsilon)}} = \frac{e^{-0,5y}}{e^{-(1+\varepsilon)\ln(x+y)}} = e^{(1+\varepsilon)\ln(x+y) - 0,5y},$$

wobei der Exponent wegen der Konkavität von  $\ln(x+y)$  mit  $y \rightarrow \infty$  gegen  $-\infty$  strebt. Es muß also wenigstens bei der Normalverteilung und allen Verteilungen, deren Dichte schneller konvergiert, für kleine  $\sigma$  einen konvexen Indifferenzkurvenverlauf geben.

Als letztes Problem bei der Analyse von Verteilungen, die auch über der negativen Halbachse liegen, sei noch der Einfluß der durch  $\varepsilon$  gemessenen Risikofurcht auf die Steigung der Indifferenzkurven angesprochen. Es bleibt im Prinzip bei dem oben mit (A 48) schon gefundenen Ergebnis

$$(18) \quad \left. \frac{d \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_{U(\mu, \sigma)}}{d\varepsilon} \right|_{\frac{\sigma}{\mu}} > 0,$$

denn die Argumentation des Anhangs 1 läßt sich vollständig übernehmen.

Somit können wir zusammenfassen: Obwohl von den subjektiven Präferenzen her (wegen  $\varepsilon < 1$  allerdings mäßige) Risikofurcht vorliegt, sorgt die Mehr-als-er-hat-kann-man-ihm-nicht-nehmen-Regel für ein Risikovorliebe anzeigendes Verhalten, wenn nur die juristische Vermögensverteilung weit genug über die negative Halbachse hinaus streut.

Im Falle links bei  $\mu - \underline{k}\sigma$ ,  $\underline{k} < \infty$ , beschränkter, linearer Klassen entstammender Dichtefunktionen hat das Indifferenzkurvensystem im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm im Bereich  $\mu/\sigma > \underline{k}$  den üblichen Verlauf, doch im Bereich  $\mu/\sigma < \underline{k}$  wird für genügend kleine  $\mu/\sigma$  die Steigung negativ, so daß die Indifferenzkurven schließlich sogar in den zweiten Quadranten einmünden. Dort haben sie Asymptoten mit der Steigung  $-\bar{k}$ , wenn  $\bar{k}$  die obere Grenze der standardisierten Verteilung kennzeichnet.

Im Falle links unbeschränkter linearer Verteilungen münden die Indifferenzkurven nach wie vor senkrecht in die  $\mu$ -Achse ein und weisen in der Nähe dieser Achse eine Risikofurcht anzeigende Konvexität auf, wenn ihre Dichte  $f_z(z)$  für  $z \rightarrow \infty$  mindestens so schnell wie die der Normalverteilung konvergiert. Das Verhalten für kleine  $\mu/\sigma$  entspricht jenem der links beschränkten Verteilungen. Für die Normalverteilung bedeutet dies, daß die zugehörigen Indifferenzkurven im 2. Quadranten senkrechte Asymptoten besitzen.

Die Steigung der Indifferenzkurven an einem beliebigen Punkt im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm ist generell eine positive Funktion der durch  $\varepsilon$  gemessenen Risikofurcht.

Für alle linearen Verteilungsklassen bleibt das Indifferenzkurvensystem homothetisch.

### 1.3. Kritik der subjektivistischen Begründung der Risikovorliebe

Die hier gegebene Erklärung für Risikovorliebe ist ganz anders als die herkömmlichen Begründungen. Mit der sonst immer angeführten subjektiven Risikoneigung hat sie nämlich nur insofern zu tun, als die Nutzenfunktion bei  $v \rightarrow 0$  beschränkt sein muß. Zum Vergleich stelle man nur einmal die

mit (2) beschriebene Nutzenkurve neben die klassischen von TÖRNQVIST (1945), FRIEDMAN und SAVAGE (1948) und MARKOWITZ (1952b) vorgeschlagenen Kurven<sup>17</sup>, wie es in der Abb. 11 getan wird.

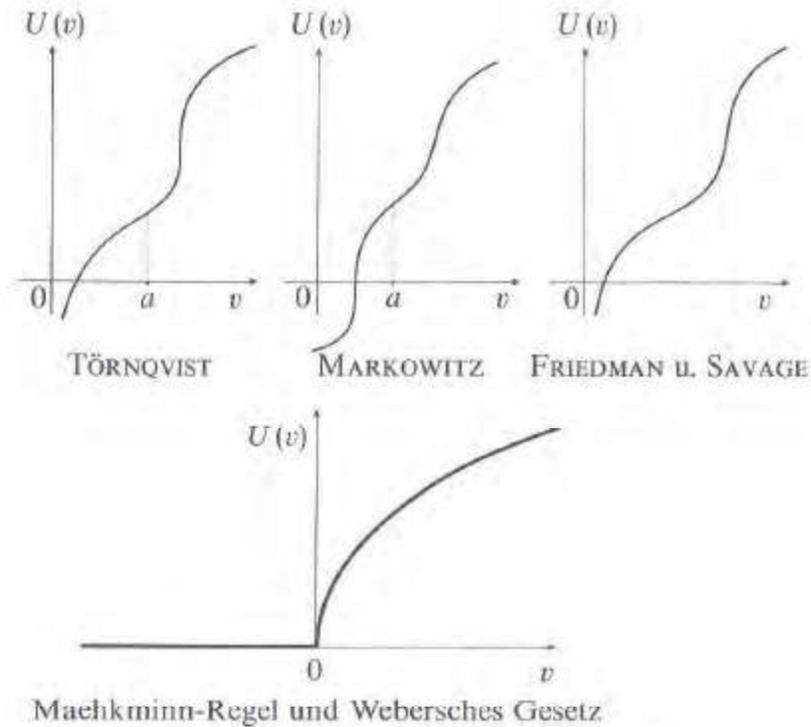


Abbildung 11

Den klassischen Vorschlägen ist gemein, daß die durch den teilweise konvexen Verlauf der Kurven zum Ausdruck kommende Risikovorliebe mit der empirisch unbestreitbaren Neigung der Menschen, an Glücksspielen mit negativem Erwartungsgewinn teilzunehmen, begründet wird. Bei Markowitz und Törnqvist liegen die konvexen Stücke jeweils jenseits des Anfangsvermögens, da sich dort der für Glücksspiele charakteristische Streubereich befindet. Diese Annahme impliziert, daß es keine feste Vermögensnutzenfunktion gibt, sondern daß ihre Lage vom Anfangsvermögen festgelegt wird. Friedman und Savage versuchen über ihren Kurvenverlauf der Beobachtung Rechnung zu tragen, daß insbesondere arme Leute an Glücksspielen teilnehmen. Sie sehen daher den konvexen Bereich ihrer vom Wohlstand des

<sup>17</sup> Friedman und Savage nennen das Argument der Nutzenfunktion „Einkommen“. Ihre Ausführungen begründen aber eher eine Vermögensnutzenfunktion. Bei Törnqvist und Markowitz wird die Lage der Nutzenfunktionen vom Ausgangsvermögen ( $a$ ) abhängig gemacht.

Entscheidungsträgers unabhängigen Nutzenfunktion für mittlere Vermögen (resp. Einkommen) vor<sup>18</sup>.

Die angeführten klassischen Argumentationen sind empirisch fragwürdig, inkonsistent und implizieren irrationales Risikoverhalten. Wenn Friedman und Savage recht hätten, dann müßte die Intensität der Versicherungsnachfrage beim oberen Mittelstand außerordentlich gering sein, während, aus ihrem Ansatz heraus argumentiert, in dieser soziologischen Klasse niemand bereit wäre, Roulette zu spielen. Würde man die Törnqvist-Markowitz-Hypothese einer vermögensabhängigen Verschiebung der Nutzenkurve akzeptieren, dann wäre zwar beseitigt, was uns am Friedman-Savage-Ansatz stört, doch wäre dieser Vorteil mit der Billigung inkonsistenten Verhaltens zu bezahlen, wie wir es ja schon bei der Diskussion des Relativitätsaxioms moniert hatten<sup>19</sup>.

Diese Ungereimtheiten deuten darauf hin, daß es schon vom Ansatz her verfehlt ist, aus der Bewertung von Glücksspielen auf die Gestalt der Nutzenfunktion schließen zu wollen. Ganz deutlich wird der Fehler an einigen Besonderheiten der Spielvorliebe, die sich nur schwer mit den von Neumann-Morgenstern-Axiomen in Einklang bringen lassen.

- Zunächst ist dabei die Freude an der Kompliziertheit des Spiels zu nennen, die bekanntlich dem fundamentalen Ordnungsaxiom widerspricht<sup>20</sup>. Sie kann bereits die Erklärung für eine Teilnahme an Glücksspielen sein, die unabhängig von der Frage, ob die Risikopräferenzfunktion für nüchterne wirtschaftliche Entscheidungen konkav ist, Gültigkeit besitzt.

<sup>18</sup> Die links vom konvexen Bereich liegenden konkaven Kurvenstücke werden bei allen Autoren auf die Neigung, Versicherungen abzuschließen, zurückgeführt. Das rechts liegende konkave Stück wird bei Friedman und Savage damit begründet, daß Glücksspiele mit mehreren Preisen ausgestattet sind, was einen Risikoaversion andeutenden Diversifikationswunsch der Menschen nahelegt. Törnqvist und Markowitz behaupten aus einer mehr formalen Sicht hingegen, daß die Nutzenfunktionen oben beschränkt sein müßten, wobei der erstere seine Intuition und der zweite den Wunsch, das unten noch zu diskutierende Petersburger Paradoxon zu vermeiden, anführt. Mit einem ähnlichen Argument fordert Markowitz schließlich auch eine untere Beschränkung der Nutzenfunktion, was interessanterweise wieder einen konvexen Funktionsbereich erzeugt.

<sup>19</sup> Vgl. S. 158 ff.

<sup>20</sup> Wenn man nur ein vom Einsatz und von der Ausgestaltung des Spiels unabhängiges Vergnügen am Spiel empfindet, das vielleicht additiv dem von Neumann-Morgenstern-Nutzen hinzugefügt werden kann, dann mag MARKOWITZ (1952b, S. 157f.) Recht haben, wenn er behauptet, eine konkave Risikopräferenzfunktion führe zu dem Ergebnis, daß "... when millionaires play together, they play for pennies". Wenn aber die völlig unplausible Unabhängigkeit der Nutzen aufgegeben wird, dann ist es sehr gut möglich, daß die Millionäre um größere Summen spielen, obwohl sie bei ernsthaften geschäftlichen Entscheidungen Risikofurcht zeigen.

- Sodann spricht einiges für ALLAIS' (1952, S. 132) Vermutung, die Spielvorliebe könne damit erklärt werden, daß der Einsatz unter einer Merklichkeitsschwelle bleibe, während der ganz andere Dimensionen annehmende mögliche Gewinn natürlich jenseits einer solchen Schwelle liege. Auch in diesem Falle kann die (diskrete) Risikopräferenzfunktion sehr wohl konkav sein.
- Ein ähnliches Argument lautet, daß es eine menschliche Schwäche sei, geringe Wahrscheinlichkeiten über- und hohe Wahrscheinlichkeiten unterzubewerten. Damit ließe sich eine Risikovorliebe bei Glücksspielen, die typischerweise extrem niedrige Gewinnchancen bieten, durchaus erklären. Eine solche Erklärung hält jedenfalls YAARI (1965) für nötig, weil er den von Friedman und Savage behaupteten konvexen Bereich der Risikopräferenzfunktion experimentell nicht aufdecken konnte.
- Schließlich müssen grundlegende Zweifel an der Anwendung der von Neumann-Morgensternschen Rationaltheorie auf die Spielsituation angebracht werden. Ist nicht der bei Spielern zu beobachtende Schicksalsglaube und der Pseudorationalkalkül der „totsicheren Spielsysteme“ geradezu ein Musterbeispiel für Irrationalität? Oder hat nicht HICKS (1962, S. 793) recht<sup>21</sup>, wenn er zur Unterscheidung von Portefeuilleentscheidungen und Glücksspielen sagt: „They [die Portefeuilleentscheidungen] are work; gambling is relaxation. To expect consistency in gambling is futile, for gambling is a rest from consistency.“

Anstatt das Spielerverhalten erklären zu wollen, sollte man sich daher lieber um die Berücksichtigung einiger anderer Risikovorliebe anzeigender Präferenzen bemühen, die nichts mit Spielfreude und Merklichkeitsschwellen zu tun haben und bei Leuten zu beobachten sind, die sich ihren Vorteil durchaus richtig auszurechnen wissen.

Warum ist offenkundig bei den meisten Menschen die Intensität der Nachfrage nach Haftpflichtversicherungen so gering, daß es eines gesetzlichen Zwanges bedarf, um überhaupt ein profitables Versicherungsgeschäft in Gang zu bringen? Warum wagt es der Unternehmer, dem „das Wasser bis zum Halse steht“, noch einmal „alles zu riskieren“? Wie kommt es, daß die Reeder ihre Tanker als dünne Blechkisten bauen lassen, die bei der kleinsten Kollision ihr Öl ins Meer ergießen und unermessliche Schäden anrichten? In all diesen Fällen zeigt sich Gleichgültigkeit gerade gegenüber stark negativen Ausprägungen der juristischen Vermögensverteilung. Die in der abgeleiteten Nutzenfunktion erfaßte Mehr-als-er-hat-kann-man-ihm-nicht-nehmen-Regel liefert die Erklärung.

<sup>21</sup> Vgl. auch HICKS (1931, S. 181).

2. Das vollständige Indifferenzkurvensystem bei starker Risikoaversion ( $\varepsilon \geq 1$ ):  
Die implizit vorhandene lexikographische Ordnung

Im Unterschied zum Fall  $\varepsilon < 1$  ist es jetzt nicht mehr möglich, aus der *Maehkminn-Regel* (1) eine vollständige von Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktion nach der Art von (2) abzuleiten, denn bei  $\varepsilon \geq 1$  ist die originäre Funktion an der Stelle  $v=0$  unbeschränkt<sup>22</sup>:  $\lim_{v \rightarrow 0} U^f(v) = -\infty$ . Doch immerhin bleibt es wahr, daß man jemandem nicht mehr nehmen kann, als er hat; Ob man sein Vermögen gerade nur verliert oder man sich darüber hinaus auch noch eine ohnehin nicht tilgbare Schuld anschreiben läßt, ist egal. Als totales Fiasko wird *beides* empfunden.

Wir müssen daher schließen, daß bei  $v = \tilde{v} = 0$  eine *lexikographische Vermögensgrenze* liegt, so daß die Maximierung der „Überlebenswahrscheinlichkeit“ zum prävalenten Ziel wird:

$$(19) \quad \max W(v > 0).$$

Daß die Verbindung von Weberschem Gesetz und *Maehkminn-Regel* die *Möglichkeit* einer lexikographischen Vermögensgrenze gerade bei  $\tilde{v} = 0$  eröffnet, steht im Einklang mit unseren allgemeinen Erörterungen zur Theorie der lexikographischen Präferenz in Kapitel II B. Dort hatten wir im Unterabschnitt 1.2 ja bereits erkannt, daß die lexikographische Vermögensgrenze, wenn es sie überhaupt gibt, bei  $\tilde{v} = 0$  liegen muß.

Für lineare Verteilungsklassen lassen sich mit der Information aus (19) bereits (Pseudo-)Indifferenzkurven im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm konstruieren. Da der geometrische Ort aller Punkte mit der gleichen Überlebenswahrscheinlichkeit bekanntlich<sup>23</sup> durch die Bedingung

$$(20) \quad \frac{\mu - \tilde{v}}{\sigma} = \text{const.}$$

angegeben wird, sind die Pseudoindifferenzkurven durch Ursprungsstrahlen gekennzeichnet; das wird in der Abb. 12 dargestellt.

Freilich ist in der Regel nicht das gesamte  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm mit Pseudo-Indifferenzkurven ausgefüllt, denn es kommen die Unter- ( $\underline{k}$ ) und Obergrenzen ( $\bar{k}$ ) der standardisierten Verteilung  $z = (v - \mu)/\sigma$  ins Spiel, wie es die Abb. 12 ebenfalls zeigt.

<sup>22</sup> Damit liegt eine Einschränkung des Gültigkeitsbereichs des oben angenommenen archimedischen Axioms vor. Dieses Problem wird im folgenden Abschnitt C diskutiert. Vgl. besonders S. 199f.

<sup>23</sup> Vgl. Kapitel II B 1.1, Gleichung (5) und (6).

Nach unten hin kann das Pseudoindifferenzkurvenfeld aus dem gleichen Grund wie das oben in Abb. 10 dargestellte normale Indifferenzkurvenfeld<sup>24</sup> durch die Ursprungsgerade  $\mu = -\bar{k}\sigma$  beschränkt sein, unterhalb derer sich ein Indifferenzfeld anschließt. Daß diese Grenze praktisch irrelevant ist, braucht nicht betont zu werden.

Wichtiger ist indes die Obergrenze  $\mu = \underline{k}\sigma$ , oberhalb derer sich bei links beschränkten Vermögensverteilungen der bereits aus Abb. 6 bekannte Bereich substitutionaler Indifferenzkurven anschließt. Ist zwischen Verteilungen aus diesem Bereich zu wählen, dann kommt das prävalente Ziel einer Maximierung der Überlebenswahrscheinlichkeit natürlich nicht zum Zuge, denn das Überleben wird bei allen zur Wahl stehenden Alternativen gleichermaßen gesichert.

Bei der Diskussion der Abb. 6 hatten wir offen gelassen<sup>25</sup>, wie die Indifferenzkurven in der Nähe der Geraden  $\mu = \underline{k}\sigma$  verlaufen. Auf diese Frage wollen wir jetzt eingehen, um das Feld der „normalen“ und jenes der Pseudo-Indifferenzkurven nahtlos aneinander zu fügen. Für den Fall der beschränkten Nutzenfunktionen ( $0 < \varepsilon < 1$ ) hatten wir ja gefunden, daß generell (vgl. Gleichung (7))  $d\mu/d\sigma|_{U(\mu,\sigma)} < \mu/\sigma$ , was impliziert, daß die Indifferenzkurven sich der Geraden  $\mu = \underline{k}\sigma$  mit kleinerer Steigung als  $\underline{k}$  nähern. Auch in dem hier vorliegenden Fall  $\varepsilon \geq 1$  ist ein solcher Verlauf keineswegs ausgeschlossen. Wie im Anhang 2 zu diesem Kapitel, speziell mit den Formeln (25)–(29) gezeigt wird, bestehen nämlich für normal verlaufende Dichtefunktionen, d. h. solche, die links kontinuierlich gegen 0 gehen, für die also  $f_z(-\underline{k}+) = f_z(-\underline{k}-) = 0$ , die folgenden Möglichkeiten:

$$(21) \quad \lim_{\mu/\sigma \rightarrow \underline{k}+} \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_{U(\mu,\sigma)} \begin{cases} = \mu/\sigma & \text{für } \varepsilon \geq 2, \\ < \mu/\sigma & \text{für } \varepsilon < 2. \end{cases}$$

(Zur Übertragung des Ergebnisses aus dem Anhang betrachte man nur die Berechnung von  $\lim_{x \rightarrow y+} B$ , substituiere  $d\mu/d\sigma|_{U(\mu,\sigma)}$  gemäß Gleichung (A 48) für  $B$  und setze  $y \equiv \underline{k}$ ,  $x \equiv \mu/\sigma$ ,  $\Theta \equiv \varepsilon$  und  $w \equiv z$ ).

Bei einer vergleichsweise geringen Risikofurcht ( $\varepsilon < 2$ ) bleibt es also dabei, daß die Indifferenzkurven im Winkel auf die Gerade  $\mu = \underline{k}\sigma$  stoßen. Doch für eine stärkere Risikofurcht ( $\varepsilon \geq 2$ ), die auch für die Abb. 13 angenommen wurde, ist es anders. Unter dieser Bedingung schmiegen sich die Indifferenzkurven der Ursprungsgeraden an. Es sei noch erwähnt, daß dies selbst bei mäßiger Risikoaversion ( $\varepsilon \geq 1$ ) auftreten muß, wenn eine „abgeschnittene“ Dichtefunktion mit  $f_z(-\underline{k}-) = 0$  und  $f_z(-\underline{k}+) > 0$  vorliegt. Dies folgt aus dem Anhang 2 mit den Formeln (2) – (24).

<sup>24</sup> Siehe S. 180.

<sup>25</sup> Siehe S. 166.

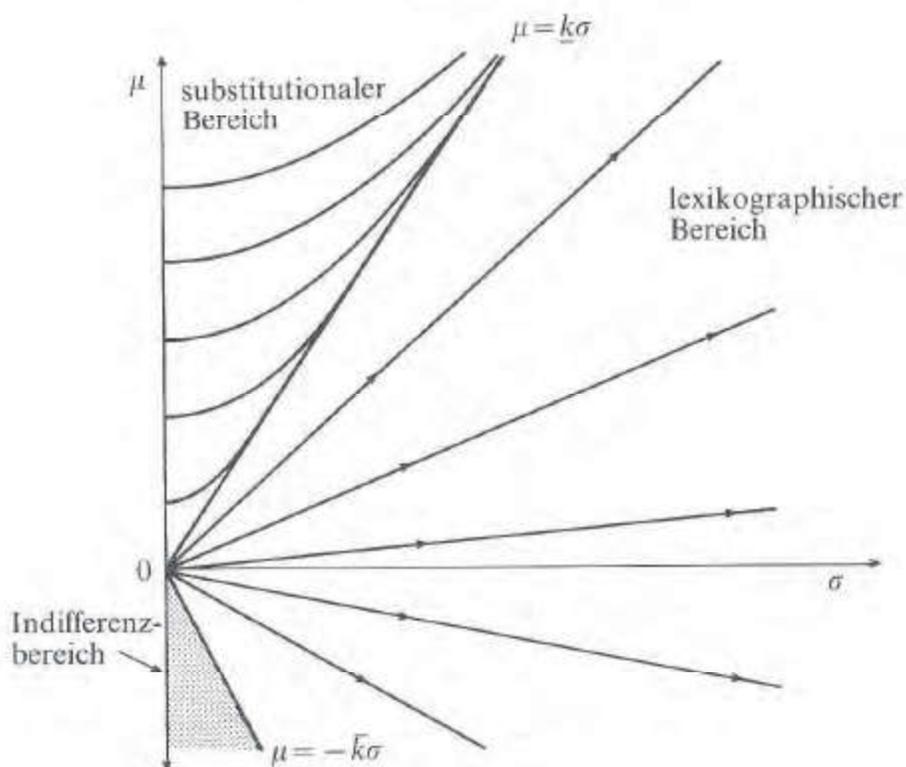


Abbildung 12

Bislang haben wir nur den Fall links beschränkter Verteilungen betrachtet, für die der praktisch relevante Teil des Indifferenzkurvenfeldes in einen substitutionalen und einen lexikographischen Bereich zerfällt. Welche Änderung sich im Fall links unbeschränkter Verteilungen, wie z. B. der Normalverteilung mit  $k = \infty$  ergibt, folgt unmittelbar, wenn man den entsprechenden Grenzübergang bildet: Der substitutionale Indifferenzkurvenbereich verschwindet völlig.

Das hat die beachtliche Implikation, daß die Regel<sup>26</sup>, daß für genügend kleine Standardabweichungen ein risikoneutrales Verhalten angebracht ist, also nach dem Erwartungswert allein entschieden werden kann, in eklatanter Weise durchbrochen wird. Bei  $\sigma \rightarrow 0$  muß jede noch so kleine Veränderung der Standardabweichung durch eine unendlich große Zunahme des Erwartungswertes kompensiert werden. Man mag diese Implikation für unsinnig und deshalb den Fall  $\varepsilon \geq 1$  für unrealistisch halten. Doch sollte man nicht vergessen, daß die juristischen Vermögensverteilungen der Wirklichkeit häufig durch Haftungsbeschränkungen in den verschiedensten Formen links begrenzt sind. Auch die populäre Normalverteilung ist, was ihren unteren Zipfel anbetrifft, mitunter keine gute Approximation der juristischen Verteilungen, zwischen denen wirtschaftliche Entscheidungsträger zu wählen haben. So sehen wir in der Implikation für die Bewertung unbe-

<sup>26</sup> Vgl. S. 121f.

schränkter Verteilungen keinen *zwingenden* Grund, der es uns erlauben würde, eine an sich erfreuliche, weitere Einschränkung der nach dem Weberschen Gesetz noch zulässigen Präferenzstrukturen auf den Fall  $0 < \varepsilon < 1$  vorzunehmen.

Gleichwohl gibt es aber einige Evidenz dafür, daß  $0 < \varepsilon < 1$  den Normalfall darstellt. So müßte man bei  $\varepsilon \geq 1$  jede beliebige Prämie für eine Haftpflichtversicherung zu zahlen bereit sein, eine Implikation, die der Wirklichkeit recht deutlich widerspricht. Man kann hier zwar einwenden, daß es immerhin Menschen gibt, die eine Haftpflichtversicherung auch freiwillig abschließen. Doch folgt aus dieser Beobachtung nicht zwangsläufig, daß diese Menschen auch eine lexikographische Präferenz haben, denn *möglich* ist ein solches Verhalten schließlich auch bei  $\varepsilon < 1$ . Umgekehrt folgt aber aus der Beobachtung, daß einige Menschen keine Haftpflichtversicherung nachfragen, daß *sie* ganz sicher keine lexikographische Präferenz haben. Im übrigen wird sich später bei der Mehrperiodenanalyse zeigen, daß *nur* der Fall  $\varepsilon < 1$  mit der Beobachtung, daß die Menschen mit dem Alter risikoscheuer werden, kompatibel ist. Daß man trotz allem letztlich nicht ausschließen kann, daß es Menschen mit  $\varepsilon \geq 1$  gibt, sollte klar sein.

Eine noch offene Frage ist, wie Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit gleicher, jedoch von 1 verschiedener Überlebenswahrscheinlichkeit bewertet werden sollen. Auf Indifferenz kann man ja bekanntlich nicht schließen. Die Antwort ist nicht offenkundig, da der Erwartungsnutzen dieser Verteilungen durchweg  $-\infty$  ist. Trotz der Unendlichkeit kann man aber die beste Verteilung ermitteln, wenn man sich bemüht, Dominanzrelationen aufzudecken. Wir wollen uns damit begnügen, dies für lineare Verteilungsklassen zu tun. Aus der Normierung  $v = \mu + z\sigma$ ,  $E(z) = 0$ ,  $\sigma(z) = 1$ , die für solche linearen Verteilungsklassen vorgenommen werden kann, erkennt man, daß eine proportional gleiche Veränderung von  $\mu$  und  $\sigma$ , die die Überlebenswahrscheinlichkeit nicht verändert<sup>27</sup>, eine Verbesserung bedeuten muß, denn wegen (2) und

$$(22) \quad \lambda v = \lambda \mu + z \lambda \sigma, \quad \lambda > 1,$$

wird einer jeden Ausprägung  $z$  der standardisierten Zufallsvariablen eine größere Ausprägung  $v$  der faktischen Vermögensverteilung zugewiesen, wenn zuvor  $v > 0$  war, und die gleiche Ausprägung, wenn zuvor  $v = 0$  war. Die Verbesserung leuchtet unmittelbar ein, ist indes aber auch durch das Unabhängigkeitsaxiom in Verbindung mit dem Nichtsättigungsaxiom zu erklären. Nach diesen Axiomen läge eine Verbesserung ja bereits dann vor, wenn sich nur ein einziges noch so kleines Intervall  $\underline{z} \leq z \leq \bar{z}$ ,  $\underline{z} < \bar{z}$ , isolieren

<sup>27</sup> Siehe Gleichungen (II B 5) und (II B 6), wobei  $\bar{v} = 0$  zu setzen ist.

ließe, welches die Eigenschaft aufweist, daß, falls eine Ausprägung  $z$  dort hineinfällt, als Ergebnis ein höheres Vermögen als zuvor erzielt wird, und falls die Ausprägung  $z$  andere Werte annimmt, sich am Ergebnis nichts ändert. Diesen Überlegungen wird in der Abb. 12 dadurch Rechnung getragen, daß die Ursprungsstrahlen mit Pfeilen versehen sind. Wandert man auf einem Ursprungsstrahl nach rechts, so gelangt man wegen der Dominanzrelation zu besser bewerteten Verteilungen.

Damit ist das Wichtigste zum Fall  $\varepsilon \geq 1$  gesagt. Der Übersichtlichkeit halber fassen wir das Ergebnis noch einmal kurz zusammen:

Im Fall starker Risikoaversion ( $\varepsilon \geq 1$ ) impliziert das Webersche Relativitätsgesetz im Zusammenhang mit der Maehkminn-Regel, daß es bei  $\bar{v} = 0$  eine lexikographische Vermögensgrenze gibt. Die Maximierung der „Überlebenswahrscheinlichkeit“  $W(V > \bar{v})$  ist daher das prävalente Ziel. Es kommt allerdings nur dann zum Tragen, wenn die zu bewertenden Verteilungen zum Teil über der negativen Halbachse liegen. Ist dies nicht der Fall, bleiben die üblichen Eigenschaften der Erwartungsnutzenbewertung bei konkaver Nutzenfunktion erhalten.

Bei linearen, links bei  $\mu - \underline{k}\sigma$ ,  $\underline{k} < \infty$ , und rechts bei  $\mu + \bar{k}\sigma$ ,  $\bar{k} < \infty$ , beschränkten Verteilungsklassen sind im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm drei Bereiche zu unterscheiden: Ein Indifferenzfeld für  $\mu/\sigma \leq -\bar{k}$ , ein Bereich mit Ursprungsstrahlen als Pseudoindifferenzkurven für  $-\bar{k} < \mu/\sigma \leq \underline{k}$  und schließlich ein Normalbereich substitutionaler Indifferenzkurven für  $\mu/\sigma > \underline{k}$ . Der Nahtlinie zwischen den beiden letztgenannten Bereichen nähern sich die substitutionalen Indifferenzkurven „im Winkel“, solange  $\varepsilon < 2$  und eine links kontinuierlich abfallende Dichtefunktion vorliegt, und mit gleicher Steigung, wenn  $\varepsilon \geq 2$  und/oder die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit links sprunghaft verschwindender Dichte auftritt. Eine Pseudoindifferenzkurve rangiert über einer anderen, wenn sie für gegebene  $\sigma$  höherer Werte für  $\mu$  anzeigt. Auf einer Pseudoindifferenzlinie gelangt man mit wachsender Entfernung vom Ursprung zu besser bewerteten Verteilungen.

Bei linearen unbeschränkten Verteilungsklassen, zu denen die Normalverteilung gehört, ist das gesamte  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm mit aus dem Ursprung entspringenden Pseudoindifferenzkurven ausgefüllt.

## Abschnitt C

### Arrows Hypothese der zunehmenden relativen und abnehmenden absoluten Risikoaversion

ARROW (1965, S. 28–44; 1970, S. 90–120) propagiert eine Präferenzstruktur, die sozusagen zwischen der Hypothese der vermögensunabhängigen und der konstanten relativen Risikoaversion liegt. Sie impliziert, daß ein Anwachsen des Vermögens zu einer Zunahme der Intensität der Versiche-

rungsnachfrage bei einer Vermögensversicherung und einer Abnahme der Intensität der Versicherungsnachfrage bei einer Versicherung von gegebenem Wertumfang führt<sup>1</sup>.

Entscheidend für die Argumentation zugunsten der Hypothese der zunehmenden relativen Risikoaversion ist die Forderung nach einer beidseitigen Beschränkung der Nutzenfunktion über der positiven Halbachse, die ARROW (1965, S. 18–27; 1970, S. 44–89) aus dem Bemühen, ein verallgemeinertes *Petersburger Paradoxon* zu vermeiden, ableitet. Das Petersburger Paradoxon ist ein altbekanntes mathematisches Problem, das seinen prägnanten, wenn auch nicht ganz korrekten Namen nach den von BERNOULLI (1738) in St. Petersburg veröffentlichten Lösungsversuchen erhielt. Zur Lösung dieses klassischen Problems hat bereits MENGER (1934) eine obere Beschränkung der Nutzenfunktion verlangt und damit Arrows Forderung teilweise vorweggenommen.

Der Forderung nach einer beidseitigen Beschränkung der Nutzenfunktion, also  $\lim_{v \rightarrow 0+} U(v) > -\infty$  und  $\lim_{v \rightarrow \infty} U(v) < +\infty$ , werden die aus dem Weberschen Relativitätsgesetz abgeleiteten Funktionen (A 34) (vgl. auch Abb. 6) wegen

$$(1) \quad \lim_{v \rightarrow 0+} U(v) = -\infty, \quad \text{wenn } \varepsilon \geq 1,$$

und

$$(2) \quad \lim_{v \rightarrow +\infty} U(v) = +\infty, \quad \text{wenn } \varepsilon \leq 1,$$

nicht gerecht. Statt dessen benötigt man Nutzenfunktionen, die für  $v \rightarrow 0+$  eine relative Risikoaversion  $\varepsilon(v)$  von  $< 1$ , für  $v \rightarrow \infty$  hingegen eine solche von  $> 1$  aufweisen, also Funktionen, die eine *zunehmende relative Risikoaversion* implizieren<sup>2</sup>.

Da Arrows Forderung unsere Präferenzhypothese scheinbar in den Grundfesten erschüttert und außerdem in der Literatur bisweilen kritiklose Anerkennung gefunden hat, müssen wir uns mit ihr im folgenden gründlich auseinandersetzen. Wir werden zunächst die klassische Argumentation zum

<sup>1</sup> Vgl. S. 169 ff.

<sup>2</sup> Ein Beweis dazu findet sich bei ARROW (1970, S. 110f.). Eine einfache formale Beschreibung der Hypothese der zunehmenden relativen Risikoaversion kann die von RUBINSTEIN (1976) vorgeschlagene verallgemeinerte Nutzenfunktion  $U(v) = \ln(\alpha + v)$  im Fall  $\alpha > 0$  liefern. Es ist hier nämlich

$$\varepsilon(v) = \frac{U''(v)}{U'(v)} v = \frac{1}{\alpha/v + 1} \quad \text{und somit} \quad \frac{\partial \varepsilon(v)}{\partial v} > 0.$$

Sie ist wegen  $\lim_{v \rightarrow 0} \ln(\alpha + v) = \ln \alpha$  zwar unten, doch wegen  $\lim_{v \rightarrow \infty} \ln(\alpha + v) = \infty$  nicht oben beschränkt.

Petersburger Paradoxon bis einschließlich Menger verfolgen und uns Arrow anschließend zuwenden. Im Zusammenhang mit Arrow sind drei Probleme zu diskutieren. Erstens die Frage der Nutzenbeschränkung an sich, zweitens die Frage, ob aus der Nutzenbeschränkung wirklich inhaltlich bedeutsame Implikationen für die Risikobewertung gewonnen werden können, und drittens die empirische Evidenz, die Arrow zugunsten seiner Hypothese glaubt anführen zu können. Da es bei dem dritten Punkt um die optimale Strukturierung von Wertpapierportefeuilles geht, schieben wir seine Behandlung bis zum letzten Kapitel (V) auf, wo solche Fragen behandelt werden<sup>3</sup>.

### 1. Das Petersburger Paradoxon

Peter fragt Paul, wieviel er für das folgende Glücksspiel einzusetzen bereit ist. Eine Münze wird so häufig geworfen, bis zum ersten Mal „Wappen“ erscheint. Dann zahlt Peter dem Paul den Betrag von  $2^n$  Dukaten, wenn  $n$  die Zahl der Würfe mißt. Werden Glücksspiele nach dem Erwartungswertkriterium bewertet, sollte Paul wegen

$$(3) \quad E(Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

bereit sein, einen unendlich hohen Einsatz oder doch mindestens soviel für das Spiel zu zahlen, wie er besitzt. Daß kein Paul das tun wollte, erschien vom Standpunkt der klassischen Theorie des Glücksspiels als unverständlich, ja offenbar sogar als paradox.

CRAMER (1728) und BERNOULLI (1738) glauben indes, in ihrer Theorie des Erwartungsnutzens eine Erklärung für Pauls Verhalten gefunden zu haben<sup>4</sup>. Sie liege darin, daß man

$$(4) \quad U(a) > \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n U(2^n), \quad U(v) = \begin{cases} \ln v & \text{(BERNOULLI),} \\ \sqrt{v} & \\ \min(v, v^*), v^* > 0, & \end{cases} \quad \text{(CRAMER),}$$

findet, wenn nur Pauls Vermögen,  $a$ , groß genug ist<sup>5</sup>. Paul würde sich in diesem Fall hüten, sein Vermögen für das Spiel einzusetzen.

<sup>3</sup> Siehe S. 280ff.

<sup>4</sup> Vgl. S. 81f.

<sup>5</sup>  $a$  muß bei  $\ln v$  größer als 4 und bei  $\sqrt{v}$  größer als  $1/(3-2\sqrt{2}) \approx 5,8$  sein, was, wenn es um Dukaten geht, geringwertige Summen sind. (Man könnte natürlich auch um Paläste spielen. Die meisten Leser müßten in diesem Fall am Spiel teilnehmen.)

Obwohl kein Geringerer als LAPLACE (1814, S. XV und S. 439–442) den Cramer-Bernoullischen Ansatz akzeptiert hat, behauptet MENGER (1934, bes. S. 468), daß zwar die Nutzenfunktion  $\min(v, v^*)$ , nicht jedoch die Funktionen  $\ln v$  und  $\sqrt{v}$  wie auch alle anderen nach oben hin unbeschränkten Funktionen die wahre Lösung des Problems bringen. Bei unbeschränkten Funktionen gelingt es nämlich leicht, ein Spiel zu konstruieren, bei dem

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n U[\alpha(n)] = \infty,$$

wenn statt  $2^n$  ein Betrag  $\alpha(n)$  ausgezahlt wird, der mindestens so groß ist, daß für alle  $n$  gilt:

$$(6) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n U[\alpha(n)] > c > 0, \quad c = \text{const.}$$

Wie reich Paul auch immer sein mag, für ein solches Spiel müßte er, vorausgesetzt die Nutzenfunktion sei entweder  $\ln v$  oder  $\sqrt{v}$  (allgemein: nach oben hin nicht beschränkt), alles geben, was er hat. So haben wir ein neues „Paradoxon“. Eine wirkliche Lösung bringt nach Mengers Meinung nur eine *obere Beschränkung der Nutzenfunktionen*, wie sie z. B. in Cramers zweiter Funktion auftaucht. (6) ist dann nämlich nicht länger erfüllbar.

So scheint man die obere Beschränkung der Nutzenfunktion nicht vermeiden zu können, wenn die Implikationen der Erwartungsnutzenregel im Einklang mit dem wirklichen Verhalten der Menschen stehen sollen. Doch gibt es auch andere Vorschläge zur Lösung des Petersburger Paradoxons, die zeigen, daß dieser Schluß zu voreilig wäre<sup>6</sup>.

CHIPMAN (1960, S. 221) sucht die Erklärung eines geringen Einsatzes ( $p$ ) für das Petersburger Spiel in einer lexikographischen Vermögensgrenze  $\tilde{v} > 0$ , die es unter allen Umständen erfordert, daß  $a - p + \alpha(n) > \tilde{v}$  ist. FURLAN (1946) glaubt, die Lösung liege in einer Diskontierung der Auszahlungen an Paul, die nötig sei, weil die Durchführung des Spiels Zeit benötige. MENGER (1934, S. 471f.) erörtert auch die Möglichkeit, das Paradoxon durch eine dem Menschen eigene Vernachlässigung kleiner Wahrscheinlichkeiten zu erklären. SENETTI (1976) weist darauf hin, daß beim Petersburger Spiel der Variationskoeffizient des Gewinns unendlich sei und somit bei den in der  $\mu$ - $\sigma$ -Analyse üblichen Indifferenzkurvenverläufen eine Spielbeteiligung nicht in Frage komme. Leider deckt er jedoch die Beziehung zu dem von ihm implizit unterstellten von Neumann-Morgenstern-Index nicht auf, was dringend nötig wäre, da es sich von selbst verbietet, bei der ausgefallenen

<sup>6</sup> Eine umfangreiche Literaturübersicht gibt SAMUELSON (1977).

Verteilung des Petersburger Spiels auf die üblichen Annahmen über den Verlauf von Indifferenzkurven zurückzugreifen.

Eine sehr einfache Lösung wurde von Bernoullis deutschem Übersetzer Pringsheim vertreten (BERNOULLI (1738, Fn. 10, S. 46–52)), geht aber, wie TODHUNTER (1865, S. 222) und KEYNES (1921, S. 317) berichten, bereits auf Poisson, Concordet und Cournot zurück. Nach ihr hat sich Peter mit dem Spiel, das er Paul anbietet, einfach übernommen. Wenn Paul schlau ist, weiß er, daß ungefähr in der Gegend von  $k=50$  Würfeln das Vermögen der Welt nicht mehr ausreichen würde, seinen Anspruch zu erfüllen<sup>7</sup>. Da Peter seine Zahlungsunfähigkeit bereits viel früher eingestehen müßte, ist die Gewinnerwartung des Spiels sicher endlich, nämlich weniger als  $k+1$  Dukaten<sup>8</sup>, und Paul täte gut daran, sich noch einmal zu überlegen, ob er sein Vermögen riskieren sollte. Dieser letzten Argumentation kann man sich wohl nicht verschließen. Der von BERTRAND (1907, S. 61) vorgebrachte Einwand, man könne die Gewinnerwartung durch fortgesetzte Verkleinerung der Auszahlungseinheiten unendlich machen, obwohl Peters Vermögen begrenzt ist, trifft nicht den Kern der Sache, denn ein Paradoxon in der Art, daß irgendwann Paul doch bereit sein sollte, sein Vermögen einzusetzen, läßt sich auf diese Weise nicht produzieren. Natürlich geht der Erwartungsgewinn in der verkleinerten Einheit gemessen gegen unendlich, doch, was gemeinhin übersehen wird, gemessen in der Ausgangseinheit (Dukaten) geht er gegen null<sup>9</sup>. Das aber sollte Paul nun erst recht davon abhalten, sein Vermögen herzugeben<sup>10, 11</sup>.

<sup>7</sup> Wer nicht glaubt, daß der nutzbare Spielgewinn endlich bleiben muß, kann bei BRITO (1975) nachschauen. Dort wird auf der Basis der Beckerschen Konsumtheorie bewiesen, daß er es schon deshalb bleiben muß, weil zum Konsum Zeit benötigt wird, von der man nicht genug hat.

<sup>8</sup> Wenn  $2^k$  den Betrag mißt, den Peter höchstens auszahlen kann, ist die Gewinnerwartung des Paul

$$E(Y) = \sum_{n=1}^k (1/2)^n 2^n + [1 - \sum_{n=1}^k (1/2)^n] 2^k,$$

woraus nach einigen Umformungen  $E(Y) = k+1$  folgt.

<sup>9</sup> Verkleinert man die Auszahlungseinheit auf  $1/(2^x)$  Dukaten, dann ist Peters Vermögen in der neuen Einheit ( $nE$ ) gemessen  $2^{k+x}$ , was nach der Formel in der vorangehenden Fußnote eine in neuer Einheit gemessene Gewinnerwartung von  $E(Y_{nE}) = k+x+1$ , also in Dukaten ( $D$ ) gemessen den Erwartungsgewinn

$$E(Y_D) = \frac{k+x+1}{2^x} \quad \text{und somit} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} E(Y_D) = 0$$

erbringt.

<sup>10</sup> Vgl. z.B. KEYNES (1921, S. 317) und GOTTINGER (1971/72, S. 494), die Bertrands Einwurf zu akzeptieren scheinen.

<sup>11</sup> SAMUELSON (1960) zeigt, daß der maximale Einsatz eines Erwartungsnutzenmaximierers bei einer gegen null schrumpfenden Einheit gemessen in dieser Einheit gegen  $\infty$  geht. Auch dieses Ergebnis ist aus der Sicht des Paradoxons ziemlich uninteressant.

So kommen wir zu dem Schluß, daß keinerlei Notwendigkeit besteht, die klassische Version des Petersburger Paradoxons durch die Einführung des Erwartungsnutzenkonzepts, geschweige denn durch die zusätzliche Annahme oben beschränkter Nutzenfunktionen zu lösen. Die wahre Lösung liegt in der natürlichen Begrenzung der Auszahlungen.

## 2. Das Utility-Boundedness-Theorem

In verkürzter Form lautet ARROWS (1970, S. 63–69) Begründung für die Forderung nach einer Beschränkung der Nutzenfunktion folgendermaßen:

Gegeben sei eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $e_1$  über der (strikt) positiven Halbachse, die nur endlich viele Ausprägungen der Zufallsvariablen  $V$  aufweist. Dann ist bei überall definierter Nutzenfunktion der Nutzen einer jeden Ausprägung endlich und folglich auch der Erwartungsnutzen. Weiterhin sei eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $e_2$  nach der Art des von Menger mit (6) verallgemeinerten Petersburger Spiels gegeben, die einen unendlich großen Erwartungsnutzen aufweist und auch unendlich viele Ausprägungen hat. Zusätzlich gebe es noch eine dritte Verteilung,  $e_3$ , die ebenfalls vom Typ (6) sei, jedoch Auszahlungen  $\bar{\alpha}(n)$  aufweise, wobei gelte  $\bar{\alpha}(n) > \alpha(n)$ , wenn  $\alpha(n)$  die Auszahlungen der Verteilung  $e_2$  bezeichne. Die Präferenzordnung zwischen den drei Verteilungen lautet dann  $e_1 < e_2 < e_3$ , wobei  $e_2 < e_3$  aus einem von ARROW (1970, S. 50) angegebenen Dominanzaxiom oder dem in dieser Arbeit verwendeten (starken) Unabhängigkeitsaxiom folgt. Schließlich führt Arrow eine weitere Verteilung  $e_4$  ein, die zusammen mit  $e_2$  und  $e_3$  in der nachfolgenden Tabelle dargestellt wird. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß beginnend mit der  $j$ -ten Ausspielung nur noch der (beliebig zu wählende) Betrag  $\beta$ , zuvor jedoch der gleiche Betrag wie bei der Verteilung  $e_3$ , also  $\bar{\alpha}(n)$ , ausbezahlt wird.

Ausspielung Wahrscheinlichkeit	1 $\left(\frac{1}{2}\right)^1$	2 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$	...	$j-1$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$	$j$ $\left(\frac{1}{2}\right)^j$	$j+1$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}$	...
$e_2$	$\alpha(1)$	$\alpha(2)$	...	$\alpha(j-1)$	$\alpha(j)$	$\alpha(j+1)$	...
$e_3$	$\bar{\alpha}(1)$	$\bar{\alpha}(2)$	...	$\bar{\alpha}(j-1)$	$\bar{\alpha}(j)$	$\bar{\alpha}(j+1)$	...
$e_4$	$\bar{\alpha}(1)$	$\bar{\alpha}(2)$	...	$\bar{\alpha}(j-1)$	$\beta$	$\beta$	...

Offenkundig hat die Verteilung  $e_4$  endlich viele (nämlich  $j$ ) Ausprägungen und muß daher wie die Verteilung  $e_1$  schlechter als  $e_2$  sein:  $e_2 > e_4$ . Andererseits sollte man erwarten, daß es durch die Wahl eines genügend hohen  $j$  gelingt,  $e_4$  beliebig nahe an  $e_3$  heranzubringen, denn mit einer

Vergrößerung von  $j$  kann man ja die Wahrscheinlichkeit dafür, daß  $e_4$  zu einem anderen Ergebnis als  $e_3$  führt, dem Wert 0 beliebig annähern. So müßte man es erreichen können, daß wegen  $e_3 \succ e_2$  schließlich auch  $e_4 \succ e_2$  ist. Dies würde aber einen Widerspruch bedeuten, den Arrow nur durch die Forderung nach einer oberen Nutzenschranke glaubt beseitigen zu können, da eine solche Schranke bekanntlich die Unendlichkeit des Erwartungsnutzens von  $e_2$  und  $e_3$  verhindern würde.

Wir wissen bereits aus der Diskussion um die klassische Version des Petersburger Paradoxons, daß der von Arrow konstruierte Widerspruch in der wirklichen Welt schon deshalb nicht auftreten kann, weil es die Verteilungen  $e_2$  und  $e_3$  mit unendlichen Auszahlungen gar nicht gibt. Sollte Arrow aber darauf beharren, den Verlauf der Vermögensnutzenfunktion auch für die Scheinwelt der unbegrenzten Vermögensverteilungen festzulegen, so mag er die oben unbeschränkten Weber-Funktionen  $U(v) = \ln v$  und  $U(v) = (1-\varepsilon)v^{1-\varepsilon}$ ,  $\varepsilon < 1$ , für Vermögen abändern, die den Wert der Erde übersteigen. Dann ist er zufrieden, und wir sind es auch.

Dennoch kann man Arrows Argumentation nicht als völlig belanglos abstempeln, denn sie läßt sich in gleicher Weise auch gegen eine untere Beschränkung der Nutzenfunktion anführen. Man braucht bei einer unten unbeschränkten Nutzenfunktion ja analog zu (6) nur eine *abnehmende* Folge von Ausprägungen  $\alpha(n)$  einer Vermögensverteilung zu konstruieren, so daß

$$(7) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n U[\alpha(n)] < c < 0, \quad c = \text{const.}, \quad \alpha(n) > 0.$$

Dann hat man eine Verteilung  $e_2$  mit einem Erwartungsnutzen von  $-\infty$ , der kleiner ist als der Erwartungsnutzen jeder anderen Verteilung  $e_1$  mit endlich vielen strikt positiven Vermögensausprägungen, so daß also  $e_1 \succ e_2$ . Konstruiert man anschließend analog zum obigen Vorgehen noch die Verteilungen  $e_3$  mit  $\bar{\alpha}(n) < \alpha(n)$  und  $e_4$ , so kommt man zu dem Widerspruch, daß einerseits  $e_4 \succ e_2$ , weil  $e_4$  endlich viele Ausprägungen hat, andererseits aber  $e_4 \prec e_2$ , weil  $e_4$  der Verteilung  $e_3$ , die ja eindeutig schlechter als  $e_2$  ist, durch eine Vergrößerung von  $j$  beliebig „ähnlich“ zu machen sein sollte. Der Widerspruch läßt sich lösen, wenn die Nutzenfunktion bei  $v \rightarrow 0+$  beschränkt ist, weil dann  $e_2$  und  $e_3$  endlich sind.

Diese Argumentation für eine untere Nutzenschranke kann man nicht in ähnlicher Weise entkräften wie jene gegen eine obere Schranke, denn die in ihr unterstellten Vermögensverteilungen sind ja realisierbar<sup>12</sup>. So wird es zur

<sup>12</sup> Die von ARROW (1974) auf einen Diskussionsbeitrag von RYAN (1974) gegebene Antwort zielt in diese Richtung. Arrow stellt dabei nämlich fest, daß die Existenz der mathematischen Erwartung der zu bewertenden Vermögensverteilung die Existenz des Erwartungsnutzens impliziert, wenn nur die Nutzenfunktion konkav, monoton steigend und von unten her beschränkt ist.

entscheidenden Frage, ob man tatsächlich davon ausgehen darf, daß sich in der Präferenzordnung die Verteilung  $e_4$  durch ein genügend hohes  $j$  beliebig nahe an die Verteilung  $e_3$  heranbringen läßt.

ARROW (1970, S.48f.) nimmt genau dieses mit seinem *Monotone-Continuity-Axiom* an. Das Axiom ist mit dem oben<sup>13</sup> verwendeten *archimedischen Axiom* verwandt, aber nicht identisch. Die Unterschiede werden klar, wenn man einmal die drei folgenden Annahmen unterscheidet:

1. Lexikographisch geordnete Vermögen sind generell ausgeschlossen. In diesem Fall sind die bei  $v \rightarrow 0+$  unbeschränkten Weber-Funktionen mit  $\varepsilon \geq 1$  unzulässig, da sie eine lexikographische Ordnung der Vermögenspositionen  $v=0$  und  $v>0$  implizieren. Sowohl das archimedische als auch das Monotone-Continuity-Axiom haben, wenn sie nicht eingeschränkt werden, diese Implikationen. Was das erstgenannte Axiom betrifft, ist uns diese Implikation bekannt. Für das andere zeigt sie sich, wenn man unterstellt, daß  $\beta$  in der Verteilung  $e_4$  unendlich wertvoller als jedes  $\bar{\alpha}(n)$  in der Verteilung  $e_3$  ist oder umgekehrt, denn in diesem Fall könnte es durch kein  $j$ , wie hoch es auch immer sein mag, gelingen,  $e_4$  beliebig an  $e_3$  anzunähern.

2. Die Vermögen von  $v=0$  und  $v>0$  sind lexikographisch angeordnet, und für  $v>0$  gilt das Monotone-Continuity-Axiom. Da bei den in Arrows Argumentation vorkommenden Verteilungen durchweg  $v>0$  angenommen wurde, folgt wie unter 1, daß bei  $v \rightarrow 0+$  unbeschränkte Verteilungen unzulässig sind, da sich sonst ein Widerspruch aufzeigen ließe.

3. Die Vermögen  $v=0$  und  $v>0$  sind lexikographisch angeordnet, und für  $v>0$  gilt das archimedische Axiom. In diesem Fall dürfen die Nutzenfunktionen bei  $v \rightarrow 0$  unbeschränkt sein. Um dies einzusehen, wähle man drei beliebige Ausprägungen der von Arrow angegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus, die in der Reihenfolge ihrer Größe  $v_1, v$  und  $v_2$  genannt seien, und bestimme mit einer der unten nicht beschränkten Weber-Funktionen  $\ln v$  und  $(1-\varepsilon)v^{1-\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 1$ , die „Indifferenzwahrscheinlichkeit“  $w$  des mittleren Vermögens nach der Formel

$$U(v) = wU(v_1) + (1-w)U(v_2), \quad v_2 > v > v_1.$$

Man wird immer finden, daß  $0 < w < 1$ , wie es das archimedische Axiom verlangt<sup>14</sup>.

Während der Fall 1 zeigt, daß, soweit sie nicht eingeschränkt werden, die beiden zu vergleichenden Axiome lexikographisch geordnete Vermögen und

<sup>13</sup> Vgl. Kap. II C 2.1.

<sup>14</sup> Um zu beweisen, daß in diesem Fall für Petersburger Spiele auch tatsächlich noch die Erwartungsnutzenregel folgt, muß man freilich noch für die in II C 2.2 eingeführte untere Begrenzung  $v_{\min}$  den Grenzübergang  $v_{\min} \rightarrow 0$  vornehmen. Will man also z.B. für  $e_3$  die Erwartungsnutzenregel herleiten, so tue man dies in der gewohnten Weise zunächst für  $e_4$  und setze dann  $e_3 = \lim_{j \rightarrow \infty} e_{4j}$ .

als Konsequenz dann auch unbeschränkte Nutzenfunktionen ausschließen, folgt aus einem Vergleich der Fälle 2 und 3, daß es die Spezialität des Monotone-Continuity-Axioms ist, für eine Nutzenbeschränkung selbst dann zu sorgen, wenn man die lexikographische Ordnung der Vermögensausprägungen  $v=0$  und  $v>0$  zuläßt.

Wir wissen nicht, welche dieser Annahmenkonstellationen die richtige ist. Daß der Fall 1, den wohl auch Arrow in erster Linie im Auge hat, der plausibelste ist, haben wir ja bereits im Teil B dieses Kapitels festgestellt<sup>15</sup>. Für die hier nur zur Klarstellung konstruierte Annahmenkonstellation 2 spricht nichts. Die unter 3 zusammengefaßten Annahmen gehören zu einer der nach dem Weberschen Gesetz möglichen Präferenzstrukturen. Sie werden zwar von der üblichen (berechtigten) Kritik an lexikographischen Ordnungen getroffen, doch irgendwelche darüber hinausgehenden *zwingenden* logisch oder empirisch begründeten Einwände bringt auch Arrow nicht gegen sie vor.

So können wir festhalten: Arrows Begründung einer oberen Nutzenschranke ist genausowenig fundiert wie die klassische, auf dem Petersburger Paradoxon basierende Begründung, doch die Existenz einer unteren Nutzenschranke im relevanten Bereich ist eine logische Implikation des Monotone-Continuity-Axioms, das eine verschärfte Version des archimedischen Axioms darstellt. Läßt man eine lexikographische Ordnung zwischen Vermögen von 0 und  $>0$  zu und nimmt man für  $v>0$  das archimedische Axiom an, so sind auch unten unbeschränkte Nutzenfunktionen zulässig.

### 3. Die fehlenden inhaltlichen Implikationen der Nutzenbeschränkung

Unabhängig von unserer Kritik an Arrows Annahme beschränkter Nutzenfunktionen wollen wir die Beschränkung jetzt einmal akzeptieren und nach ihren inhaltlichen Implikationen fragen. ARROW (1970, S.98) selbst sieht die folgenden: „(1) it is broadly permissible to assume that relative risk aversion increases with wealth, though theory does not exclude some fluctuations; (2) if, for simplicity, we wish to assume a constant relative risk aversion, then the appropriate value is one.“ Die Implikationen sind offenkundig vorsichtig formuliert. Dennoch täuscht die Formulierung viel mehr Gehalt vor, als wirklich vorhanden ist. Um dies zu zeigen, wollen wir uns bemühen, die Weber-Funktionen so abzuändern, daß sich zwar ihr Grenzverhalten in Arrows Sinne verändert, doch ansonsten möglichst wenige Auswirkungen auf die Bewertung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Kauf zu nehmen sind. Wenn Arrows Utility-Boundedness-Theorem irgendwelche

<sup>15</sup> Siehe S.191f.; vgl. auch die Diskussion der lexikographischen Kriterien im Kap. II C sowie S. 258, 319 und 325.

empirische Relevanz haben soll, dann muß unser Bemühen wenigstens für die von Arrow ausgeschlossene Weber-Funktion  $U(v) = (1 - \varepsilon)v^{1-\varepsilon}$ ,  $\varepsilon \neq 1$ , vergeblich sein.

Unterstellen wir zunächst die Weber-Funktion für  $\varepsilon < 1$ , und bilden wir, wie es im vorigen Unterabschnitt schon angedeutet worden war, die modifizierte Funktion

$$(8) \quad U_m(v) \equiv \begin{cases} U(v), & v < \bar{v} \\ U(\bar{v}), & v \geq \bar{v} \end{cases}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

$\bar{v} \equiv$  alle Reichtümer dieser Erde,

dann gibt es für alle in der Wirklichkeit vorkommenden Verteilungen keine Auswirkung auf die Risikobewertung. Es ist weder ersichtlich, wieso es „broadly permissible“ sein soll, eine zunehmende relative Risikoaversion im relevanten Bereich zu unterstellen, noch gibt es einen Grund dafür, „for simplicity“ eine logarithmische Funktion anzunehmen.

Anders scheint es freilich bei einer Abänderung der unten nicht beschränkten Weber-Funktionen für  $\varepsilon \geq 1$  zu

$$(9) \quad U_m(v) \equiv \begin{cases} U(v), & v > \underline{v} \\ U(\underline{v}), & v \leq \underline{v} \end{cases}, \quad \varepsilon \geq 1, \quad \underline{v} > 0,$$

zu sein. Zwar kann diese Abänderung keinen Einfluß auf die Entscheidung zwischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen haben, die nur oberhalb von  $\underline{v}$  streuen, doch steht zu vermuten, daß es bei Verteilungen, die auch unterhalb von  $\underline{v}$  streuen, einen Einfluß auf die Wahlentscheidung gibt. Insbesondere für die Bewertung von juristischen Verteilungen, die in den negativen Vermögensbereich hineinragen, sind drastische Konsequenzen zu erwarten, da

$$U_m(0) = U_m(\underline{v}) = U(\underline{v}) > -\infty.$$

Die Vermutung drastischer Konsequenzen ist aber falsch. Das soll gezeigt werden, indem wir beweisen, daß es durch die Wahl eines genügend kleinen, jedoch von Null verschiedenen  $\underline{v}$  gelingt, mit  $U_m(v)$  dieselbe Präferenzrelation zwischen zwei beliebigen (juristischen) Verteilungen  $V_1$  und  $V_2$  zu erzeugen wie mit  $U(v)$ ,

(1) wenn beide Verteilungen nur über der positiven Halbachse streuen, so daß für sie gilt  $\mu - \sigma k > 0$  mit  $k$  als der Untergrenze der standardisierten Zufallsvariablen,

(2) wenn sie eine unterschiedliche „Überlebenswahrscheinlichkeit“  $W(v > 0)$  anzeigen (mindestens eine der beiden Verteilungen ragt dann in den negativen Vermögensbereich hinein) und

(3) wenn sich bei gleicher Überlebenswahrscheinlichkeit ihre Standardabweichung unterscheidet und sie der gleichen linearen Verteilungsklasse angehören.

Zu (1) Dies zu zeigen ist trivial. Man braucht ja nur das willkürlich gewählte  $\underline{v}$  so klein zu machen, daß über dem Streubereich beider Verteilungen  $U(v)$  und  $U_m(v)$  identisch sind. Für lineare Verteilungsklassen zeigt sich dieser Effekt im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm der Abb. 14, indem sich die aus der Forderung  $\mu - k\sigma > \underline{v}$  abgeleitete Begrenzungsgerade für den Bereich, wo die Indifferenzkurven unverändert verlaufen, mit verkleinertem  $\underline{v}$  immer näher an die ehemalige Grenze zum lexikographischen Bereich,  $\mu = k\sigma$ , anlehnt.

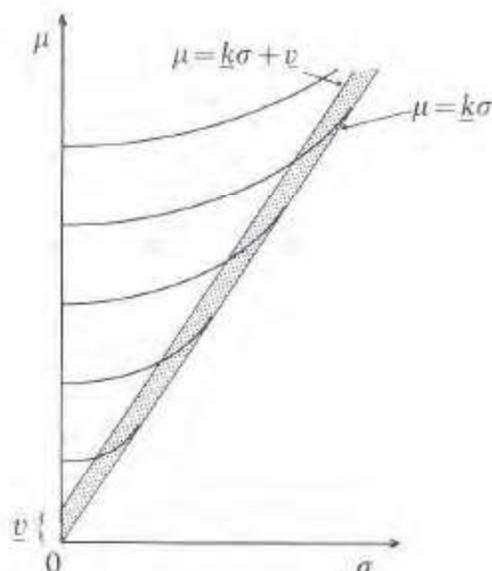


Abbildung 13

Zu (2) Unter Verwendung der unbeschränkten Funktion  $U(v)$  haben wir oben<sup>16</sup> die Maximierung der Überlebenswahrscheinlichkeit als prävalentes Ziel ermittelt. Wenn die Behauptung unter (2) stimmt, muß sich daher erweisen, daß von zwei unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $V_1$  und  $V_2$  diejenige mit der höheren Überlebenswahrscheinlichkeit bei einer Verkleinerung von  $\underline{v}$  irgendwann auch den höheren, mit  $U_m(v)$  gebildeten Erwartungsnutzen erhält. Berechnen wir also einmal mit

$$\begin{aligned}
 (10) \quad D &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(v) U_m(v) dv - \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(v) U_m(v) dv \\
 &\equiv U(\underline{v}) \int_{-\infty}^{\underline{v}} f_1(v) dv + \int_{\underline{v}}^{+\infty} f_1(v) U(v) dv \\
 &\quad - U(\underline{v}) \int_{-\infty}^{\underline{v}} f_2(v) dv - \int_{\underline{v}}^{+\infty} f_2(v) U(v) dv
 \end{aligned}$$

<sup>16</sup> Siehe Abschnitt B 2.

die Erwartungsnutzendifferenz der beiden Verteilungen mit den Dichtefunktionen  $f_1(v)$  und  $f_2(v)$ , um zu sehen, was die Beziehung

$$(11) \quad V_1 \{ \cong \} V_2 \Leftrightarrow D \{ \cong \} 0$$

mit der Beziehung

$$(12) \quad V_1 \{ \cong \} V_2 \Leftrightarrow W(V_1 > 0) = \int_0^{\infty} f_1(v) dv \{ \cong \} W(V_2 > 0) = \int_0^{\infty} f_2(v) dv$$

zu tun hat. Unterstellen wir, daß  $\underline{v}$  bereits so klein gewählt wurde, daß  $U(\underline{v}) < 0$ , dann erhalten wir nach Division des Ausdrucks (10) durch  $U(\underline{v})$ , einigen Umstellungen und Aufspaltung der Integrale  $\int_{\underline{v}}^{\infty} \dots dv$  in die Summen  $\int_{\underline{v}}^{\underline{v}'} \dots dv + \int_{\underline{v}'}^{\infty} \dots dv$ ,  $0 < \underline{v} < \underline{v}'$ ,  $U(\underline{v}) < U(\underline{v}') < 0$ , und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß  $\int_{\underline{v}}^{\infty} \dots dv = 1 - \int_{\underline{v}}^{\infty} \dots dv$ , die Gleichung<sup>17</sup>

$$(13) \quad \text{sgn } D = \text{sgn} \left[ \int_{\underline{v}}^{\infty} f_1(v) - f_2(v) dv - \int_{\underline{v}}^{\underline{v}'} [f_1(v) - f_2(v)] \frac{U(v)}{U(\underline{v})} dv - \int_{\underline{v}'}^{\infty} [f_1(v) - f_2(v)] \frac{U(v)}{U(\underline{v})} dv \right].$$

Läßt man nun  $\underline{v} \rightarrow 0$  streben, dann verschwindet bei gegebenem  $\underline{v}'$  zunächst das letzte Integral, denn es gilt:

$$(14) \quad \lim_{\underline{v} \rightarrow 0} \frac{U(v)}{U(\underline{v})} = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\underline{v} \rightarrow 0} \frac{\ln v}{\ln \underline{v}} = 0, \quad \varepsilon = 1 \\ \lim_{\underline{v} \rightarrow 0} \frac{(1-\varepsilon)v^{1-\varepsilon}}{(1-\varepsilon)\underline{v}^{1-\varepsilon}} = 0, \quad \varepsilon > 1 \end{array} \right\} \quad \forall v \geq \underline{v}' > \underline{v}.$$

Doch auch der Einfluß des zweiten Integrals läßt sich verschwindend klein machen. Zwar ändert sich sein Wert beim Grenzübergang  $\underline{v} \rightarrow 0$  nicht in eindeutiger Weise, doch immerhin gibt es für diesen Wert eine obere Schranke, die wir durch eine geeignete Wahl von  $\underline{v}$  und  $\underline{v}'$  in der Ausgangslage so klein machen können wie wir wollen, ohne damit an der Richtigkeit von (14) etwas zu ändern. Wegen  $U(v)/U(\underline{v}) \leq 1$  wird diese Schranke durch

<sup>17</sup> Hier bedeutet

$$\text{sgn } x = \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}, \quad \text{wenn } x \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0.$$

$$(15) \quad \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} [f_1(v) - f_2(v)] \frac{U(v)}{U(\varepsilon)} dv \right| \\ \leq \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} [f_1(v) - f_2(v)] dv \right|$$

angegeben. Allein das erste Integral ist jetzt noch übrig. Es nimmt bei dem zuerst beschriebenen Grenzübergang den Wert der Differenz der Überlebenswahrscheinlichkeiten der beiden betrachteten Verteilungen an. Insgesamt haben wir also

$$(16) \quad \operatorname{sgn} \left[ \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D \right] = \operatorname{sgn} \left[ \int_0^{\infty} f_1(v) dv - \int_0^{\infty} f_2(v) dv \right],$$

womit die gesuchte Beziehung zwischen (11) und (12) gefunden ist. Das Ergebnis ist bemerkenswert, denn es besagt, daß man mit Hilfe der beschränkten und daher im Sinne des Arrowschen Utility-Boundedness-Theorems zulässigen Funktion  $U_m(v)$  die in den unbeschränkten Weber-Funktionen zum Ausdruck kommende Prävalenz des Überlebenszieles beliebig genau approximieren kann. Für lineare Verteilungsklassen, auf die die vorangehende Aussage freilich nicht beschränkt ist, kommt man zu der anschaulichen Interpretation, daß sich im Bereich  $\mu/\sigma < k$  des  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramms mit sinkendem  $v$  die (nun echten) Indifferenzkurven immer enger an die Pseudo-Indifferenzkurven, die wir oben abgeleitet haben, anlehnen<sup>18</sup>.

Zu (3) Als letztes bleibt jetzt noch zu fragen, ob unter Verwendung von  $U_m(v)$  von zwei der gleichen linearen Klasse entstammenden Verteilungen mit gleicher Überlebenswahrscheinlichkeit (sie mag = 1 sein) diejenige mit dem höheren Wert für  $\sigma$  vorzuziehen ist, wie wir es für die unmodifizierten Weber-Funktionen abgeleitet haben<sup>19</sup>. Die Antwort ist leicht zu geben, wenn wir in (10) einmal die erste Verteilung mit Hilfe eines Proportionalitätsfaktors  $\lambda, \lambda > 1$ , ausdehnen, was ja keinen Einfluß auf die Überlebenswahrscheinlichkeit hat<sup>20</sup>. Wegen

$$(17) \quad D = U(v) \int_{-\infty}^{v/\lambda} f_1(v) dv + \int_{v/\lambda}^{\infty} f_1(v) U(\lambda v) dv \\ - U(v) \int_{-\infty}^v f_2(v) dv - \int_v^{\infty} f_2(v) U(v) dv$$

mit

$$(18) \quad \frac{dD}{d\lambda} = \int_{v/\lambda}^{\infty} f_1(v) U'(\lambda v) v dv > 0$$

<sup>18</sup> Das ließe sich auch unmittelbar unter Rückgriff auf die Gleichung (A 48) beweisen.

<sup>19</sup> Vgl. S. 188 ff.

<sup>20</sup> Vgl. Gleichungen (H B 5) und (H B 6) für  $\bar{x} = 0$ .

kommt es unabhängig davon, wie groß  $v$  ist, zu einer Verbesserung derjenigen Verteilung, deren Streuung parallel mit  $\lambda$  (es gilt ja  $\sigma(\lambda V) = \lambda \sigma(V)$ ) vergrößert wird. Wenn wir für die Ausgangssituation  $D=0$  annehmen, entspricht dieses Ergebnis gerade unserer Behauptung (3). In gewisser Weise scheint das Ergebnis im Widerspruch zu dem, was wir zu (2) fanden, zu stehen. Wie kann es sein, daß die Indifferenzkurven einerseits Ursprungsstrahlen im  $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm approximieren, man aber andererseits zu höheren Indifferenzkurven gelangt? Die Lösung liegt einfach darin, daß die Steigung der Indifferenzkurven sich bei  $v \rightarrow 0$  zwar an diejenige von Ursprungsstrahlen annähert, sie aber nie exakt erreicht. Zeichnerisch könnte man diese Feinheit nur noch indirekt verdeutlichen; z.B. so, daß man, wie von den Pseudoindifferenzlinien gewohnt, nach außen weisende Pfeile auf den Indifferenzgeraden anbringt. Damit kann man dann aber auch gleich beim Kurvensystem der Abb. 12 bleiben, das wir aus den unbeschränkten Weber-Funktionen abgeleitet haben.

So lautet unser Verdikt über Arrows Hypothese der zunehmenden relativen Risikoaversion: Selbst wenn man die Annahmen, die zur Nutzenbeschränkung führen, übernimmt, so folgen daraus praktisch keine inhaltlich relevanten Implikationen für die Risikobewertung. Obwohl alle aus dem Weberschen Gesetz abgeleitete Präferenzstrukturen Nutzenfunktionen implizieren, die mindestens in eine Richtung unbeschränkt sind, kann man sie so modifizieren, daß zwar der Nutzen beschränkt ist, doch die Bewertung von Risikoprojekten entweder gar nicht oder, wenn überhaupt, so in einem beliebig geringen Maße beeinflußt wird.

Auch in Anbetracht dessen, was wir in den beiden vorangegangenen Unterabschnitten feststellen konnten, sollten wir uns daher SAMUELSON (1969, S. 243) anschließen, wenn er sagt: "Since I do not believe that Karl Menger paradoxes of the generalized St. Petersburg type hold any terrors for the economist, I have no particular interest in boundedness of utility ..."

## Anhang 1 zu Kapitel III

Man nehme zunächst zur Kenntnis, daß eine Dichtefunktion  $f_{w_1}(w)$  eine höhere mathematische Erwartung  $E(W)$  als eine andere Funktion  $f_{w_2}(w)$  mit sich bringt, wenn es ein  $w^*$  gibt, so daß

$$(1) \quad f_{w_1}(w) > f_{w_2}(w), \quad \text{wenn } w > w^*,$$

und

$$f_{w_1}(w) < f_{w_2}(w), \quad \text{wenn } w < w^*.$$

Zu berechnen ist das Vorzeichen der Ableitung  $d\psi/d\varepsilon$ , wobei

$$(2) \quad \psi \equiv - \frac{\int_{-\mu/\sigma}^{\infty} z f_z(z) \left(\frac{\mu}{\sigma} + z\right)^{-\varepsilon} dz}{\int_{-\mu/\sigma}^{\infty} f_z(z) \left(\frac{\mu}{\sigma} + z\right)^{-\varepsilon} dz}.$$

Um dies zu tun, wähle man zunächst eine Zahl  $x$ , so daß, gegeben eine andere Zahl  $A$ ,  $0 < A < \infty$ , gilt:

$$(3) \quad \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} f_z(z) \left(\frac{\mu}{\sigma} + z\right)^{-\varepsilon - A} dz = \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} f_z(z) \left(\frac{\mu}{\sigma} + z\right)^{-\varepsilon} dz.$$

Eine solche Zahl kann man immer finden, wenn die Dichtefunktion  $f_z(\cdot)$  bei  $z = -\underline{k}$ ,  $\underline{k} < \mu/\sigma$ , beschränkt ist, denn dann sind für alle  $x$ ,  $0 < x < \infty$ , die beiden angeführten Integrale ebenfalls strikt positiv und endlich, und das linke Integral geht mit

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty \end{array} \right\} \quad \text{gegen} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \infty \end{array} \right\}.$$

$\underline{k} < \mu/\sigma$  sei daher zunächst unterstellt. Unter Verwendung der mit (3) festgelegten Zahl  $x$  erweitere man nun den Bruch (2) um  $(1/x)^{-\varepsilon - \delta}$  und schreibe ihn dann noch etwas anders auf, wobei man zunächst  $\delta = 0$  setze:

$$(4) \quad \psi = - \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\mu/\sigma}^x z \frac{f_z(z) \left(\frac{\mu/\sigma + z}{x}\right)^{-\varepsilon - \delta}}{\int_{-\mu/\sigma}^{\infty} f_z(z) \left(\frac{\mu/\sigma + z}{x}\right)^{-\varepsilon - \delta} dz} dz \\ + \int_x^{\infty} z \frac{f_z(z) \left(\frac{\mu/\sigma + z}{x}\right)^{-\varepsilon - \delta}}{\int_{\mu/\sigma}^{\infty} f_z(z) \left(\frac{\mu/\sigma + z}{x}\right)^{-\varepsilon - \delta} dz} dz \end{array} \right\}.$$

Um die Auswirkung einer Erhöhung des Parameters  $\varepsilon$  festzustellen, definiere man ein  $\psi_{\Delta}$  von der gleichen Struktur wie  $\psi$  in (4), nur daß  $\delta = \Delta$  gesetzt wird. Nach Konstruktion sind dann die jeweils im Nenner stehenden Integrale für  $\psi$  in (2) und  $\psi_{\Delta}$  mit der Struktur (4) identisch. Geändert haben sich mit dem Übergang zu  $\psi_{\Delta}$  nur die Zähler. Da im ersten Zähler nur Werte von  $z$  auftauchen, so daß  $\mu/\sigma + z \leq x$ , muß er durch den Übergang von  $\psi$  auf  $\psi_{\Delta} \forall z, \mu/\sigma + z < x$ , größer werden und für  $\mu/\sigma + z = x$  gleich bleiben. Anders ist es mit dem zweiten Zähler, der für alle Werte  $z, \mu/\sigma + z > x$ , kleiner wird, jedoch ebenfalls für  $\mu/\sigma + z = x$  gleich bleibt. Da nun die betrachteten Brüche nichts anderes als modifizierte Dichten für  $z$  sind (das Integral über alle Dichten ist 1), müssen wir wegen der eingangs angeführten Überlegung schließen, daß  $\psi_{\Delta} > \psi$  und somit  $d\psi/d\varepsilon > 0$ , q. e. d.

Das Ergebnis läßt sich auch auf den in Teil B untersuchten Fall  $k \geq \mu/\sigma$  verallgemeinern, wenn  $\varepsilon + \Delta < 1$ . Im Anhang 2 wird nämlich für einen anderen Gebrauch gezeigt, daß in diesem Fall Zähler und Nenner von (2) endlich bleiben, obwohl  $\lim_{z \rightarrow -\mu/\sigma} (\mu/\sigma + z)^{-\varepsilon} = \infty$ . Die obige Argumentation bleibt dann ohne Einschränkung gültig. (Man substituiere  $\psi \equiv A, z \equiv w, \mu/\sigma \equiv y, \varepsilon \equiv \Theta$  bzw.  $\varepsilon + \Delta \equiv \Theta$ .)

## Anhang 2 zu Kapitel III

Es sollen Grenzen für den Quotienten

$$(1) \quad A = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} w f_w(w) (y+w)^{-\Theta} dw}{\int_{-y}^{\infty} f_w(w) (y+w)^{-\Theta} dw}$$

abgesteckt werden. Zu diesem Zweck untersuchen wir zunächst den Bruch

$$(2) \quad B = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} w f_w(w) (x+w)^{-\Theta} dw}{\int_{-y}^{\infty} f_w(w) (x+w)^{-\Theta} dw}, \quad x > y,$$

und setzen seinen Grenzwert dem gesuchten Bruch gleich:

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow y^+} B = A.$$

$x, y$  und  $\Theta$  seien strikt positive reelle Zahlen und  $f_w(w)$  sei die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen  $W$ .  $y$  werde so gewählt, daß die Dichtefunktion bei  $w = -y$  „abgeschnitten“ wird, also

$$(4) \quad \lim_{w \rightarrow -y^-} f_w(w) \equiv f_w(-y^-) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{w \rightarrow -y^+} f_w(w) \equiv f_w(-y^+) > 0$$

vorliegt<sup>1</sup>. Die Dichtefunktion sei in einem beliebig kleinen Bereich von  $-y$  bis mindestens einschließlich  $-y + \Delta$ ,  $\Delta > 0$ , stetig, strikt positiv und entweder monoton steigend oder monoton fallend. Es gelte weiterhin

$$(5) \quad \int_0^{\infty} w f_w(w) dw < \infty.$$

Wir schreiben nun (2) als

$$(6) \quad B = -[\alpha(1 - \gamma) + \beta\gamma]$$

mit

$$(7) \quad \alpha \equiv \frac{\int_{-y}^{-y+\Delta} w f_w(w) (x+w)^{-\theta} dw}{\int_{-y}^{-y+\Delta} f_w(w) (x+w)^{-\theta} dw},$$

$$(8) \quad \beta \equiv \frac{\int_{-y+\Delta}^{\infty} w f_w(w) (x+w)^{-\theta} dw}{\int_{-y+\Delta}^{\infty} f_w(w) (x+w)^{-\theta} dw}$$

und

$$(9) \quad \gamma \equiv \frac{\int_{-y+\Delta}^{\infty} f_w(w) (x+w)^{-\theta} dw}{\int_{-y}^{\infty} f_w(w) (x+w)^{-\theta} dw},$$

wobei  $\Delta$  so gewählt sei, daß  $0 < \gamma < 1$ .

Mit  $\alpha$  und  $\beta$  werden bedingte arithmetische Mittel von  $w$  definiert. Da in  $\alpha$  nur der Streubereich  $-y \leq w \leq -y + \Delta$  und in  $\beta$  nur der Streubereich  $w \geq -y + \Delta$  erfaßt wird, gelten die Grenzen

$$(10) \quad -y < \alpha < -y + \Delta < \beta.$$

Man beachte hierzu, daß, solange der Grenzübergang  $x \rightarrow y+$  noch nicht vollzogen ist,  $x + w > 0 \forall w$  und folglich  $0 < (x + w)^{-\theta} < \infty$ . Unser Interesse gilt nun dem Grenzwert

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow y+} B = - \left[ \lim_{x \rightarrow y+} \alpha (1 - \lim_{x \rightarrow y+} \gamma) + \lim_{x \rightarrow y+} \beta \lim_{x \rightarrow y+} \gamma \right].$$

<sup>1</sup>  $f_w(-y+)$  bezeichnet die rechtsseitige Dichte an der Sprungstelle  $-y$ .

Was  $\alpha$  betrifft, begnügen wir uns mit der Feststellung, daß es die bereits abgesteckten Grenzen wohl erreichen, nicht aber überschreiten kann:

$$(12) \quad -y \leq \lim_{x \rightarrow y+} \alpha \leq -y + \Delta.$$

Über  $\beta$  läßt sich Genaueres sagen. Da es durch Ausprägungen von  $w$  bestimmt wird, für die  $w \geq -y + \Delta$ , also auch  $x + w \geq x - y + \Delta > 0$  und somit  $(x + w)^{-\theta} < \infty$  gilt, selbst wenn der Grenzübergang mit  $x = y$  bereits vollzogen ist, muß

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow y+} \beta > -y + \Delta$$

sein.

Wir kommen jetzt zum Grenzwert von  $\gamma$ . Zunächst ist festzustellen, daß wir aus dem gerade im Zusammenhang mit  $\beta$  erörterten Grund finden, daß  $(x + w)^{-\theta} < \infty$ . Somit ist der Zähler strikt positiv und endlich. Der Nenner,  $N$ , ist strikt positiv, doch ist zunächst unklar, ob er endlich bleibt. Für ihn gelten die Grenzen

$$(14) \quad N_1 + N_3 \leq N \leq N_2 + N_3, \quad N_1 \leq N_2,$$

oder

$$(15) \quad N_1 + N_3 \geq N \geq N_2 + N_3, \quad N_1 \geq N_2,$$

mit

$$(16) \quad N_1 \equiv f_w(-y) \int_{-y}^{-y+\Delta} (x+w)^{-\theta} dw,$$

$$(17) \quad N_2 \equiv f_w(-y+\Delta) \int_{-y}^{-y+\Delta} (x+w)^{-\theta} dw$$

und

$$(18) \quad N_3 \equiv \int_{-y+\Delta}^{\infty} f_w(w) (x+w)^{-\theta} dw.$$

Das Integral  $N_3$  bleibt beim Grenzübergang sicher endlich, da  $x + w + \Delta > 0$ , selbst wenn  $x = y$ . Anders steht es mit  $N_1$  und  $N_2$ . Wegen

$$(19) \quad \int_{-y}^{-y+\Delta} (x+w)^{-\theta} = \begin{cases} \ln(x-y+\Delta) - \ln(x-y), & \theta = 1, \\ (1-\theta)[(x-y+\Delta)^{1-\theta} - (x-y)^{1-\theta}], & \theta \neq 1, \end{cases}$$

gilt für die Grenzwerte beider Integrale

$$(20) \quad 0 < \lim_{x \rightarrow y+} N_{1,2} \begin{cases} < \infty, & \theta < 1, \\ = \infty, & \theta \geq 1. \end{cases}$$

Hieraus, aus der Endlichkeit des Zählers, der Endlichkeit von  $N_3$  und der Tatsache, daß der Zähler in jedem Falle kleiner als der Nenner ist, folgt für den Grenzwert von  $\gamma$ :

$$(21) \quad 1 > \lim_{x \rightarrow y+} \gamma \begin{cases} > 0, & \Theta < 1, \\ = 0, & \Theta \geq 1. \end{cases}$$

Mit den in (12), (13) und (21) enthaltenen Informationen sind wir in der Lage, nähere Aussagen für den gesuchten Grenzwert von  $A$  zu machen. Im Fall  $\Theta < 1$  ist dieser Grenzwert eine negative Linearkombination aus  $\lim \alpha$  und  $\lim \beta$  mit von 0 und 1 verschiedenen Gewichten. Da selbst bei  $\Delta \rightarrow 0$   $\lim \beta > -y$  ist, muß auch  $-\lim B > -y$  bleiben und wir haben wegen  $\lim_{x \rightarrow y} B = A$

$$(22) \quad A < y, \quad \Theta < 1; \quad f_w(-y+) > 0.$$

Im Fall  $\Theta \geq 1$  erhält  $\beta$  das Gewicht 0 und die Grenzen für  $\alpha$  werden auch die Grenzen für  $-B$ . Daher ist

$$(23) \quad y - \Delta \leq A \leq y, \quad \Theta \geq 1.$$

Nun waren die vorangegangenen Überlegungen natürlich nicht an eine bestimmte Höhe von  $\Delta$  gebunden. Vielmehr können wir  $\Delta$  so klein machen wie wir wollen, und kommen daher zu dem Schluß

$$(24) \quad A = y, \quad \Theta \geq 1; \quad f_w(-y+) > 0.$$

Nach diesem Ergebnis für die „abgeschnittene“ Dichtefunktion wollen wir nun den Fall der kontinuierlich verschwindenden Dichte behandeln. Statt (4) setzen wir daher die Annahme

$$(25) \quad \lim_{w \rightarrow -y-} f_w(w) \equiv f_w(-y-) = \lim_{w \rightarrow -y+} f_w(w) \equiv f_w(-y+) = 0, \\ 0 < f'_w(0+) < \infty.$$

Das einzige, was in diesem Fall an der obigen Beweisführung zu ändern ist, sind die Betrachtungen zur Größe des Nenners  $N$  des Ausdrucks  $\gamma$  aus (9). Im Anhang 4 wird gezeigt (Argumentation bis einschließlich Gleichung (14)), daß für

$$(26) \quad \lim_{x \rightarrow y+} N = \int_{-y}^{\infty} f_w(w) (y+w)^{-\Theta} dw$$

die Beziehung

$$(27) \quad \lim_{x \rightarrow y+} N \begin{cases} < \\ = \end{cases} \infty \Leftrightarrow 0 < \Theta \begin{cases} < \\ \geq \end{cases} 2$$

gilt. Hiernach folgt unter völlig analoger Anwendung der obigen Argumentation unmittelbar, daß statt (22) und (24)

$$(28) \quad A < y, \quad \Theta < 2, \quad f_w(-y) = 0,$$

und

$$(29) \quad A = y, \quad \Theta \geq 2, \quad f_w(-y) = 0,$$

die gesuchten Ergebnisse liefern.

### Anhang 3 zu Kapitel III

In expliziter Schreibweise lautet die Formel (B 5) des Textes (vgl. B 6)

$$(1) \quad \psi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \equiv \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_{U(\mu, \sigma)} = -\frac{\alpha\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}{\beta\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)},$$

wobei

$$(2) \quad \alpha\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \equiv \int_{-\infty}^{-\mu/\sigma} f_z(z) z U'\left(\frac{\mu}{\sigma} + z\right) dz + \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} f_z(z) z U'\left(\frac{\mu}{\sigma} + z\right) dz,$$

$$(3) \quad \beta\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \equiv \int_{-\infty}^{-\mu/\sigma} f_z(z) U'\left(\frac{\mu}{\sigma} + z\right) dz + \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} f_z(z) U'\left(\frac{\mu}{\sigma} + z\right) dz.$$

Gesucht ist die Ableitung  $\psi'(\mu/\sigma)$ . Zunächst errechnen wir

$$(4) \quad \alpha'\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{-\mu/\sigma} f_z(z) z U''\left(\frac{\mu}{\sigma} + z\right) dz - f_z\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) U'(0-) \quad (=0) \\ + \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} f_z(z) z U''\left(\frac{\mu}{\sigma} + z\right) dz + f_z\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) U'(0+),$$

$$(5) \quad \beta'\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{-\mu/\sigma} f_z(z) U''\left(\frac{\mu}{\sigma} + z\right) dz - f_z\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) U'(0-) \quad (=0) \\ + \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} f_z(z) U''\left(\frac{\mu}{\sigma} + z\right) dz + f_z\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) U'(0+).$$

Hier bedeuten  $U'(0+)$  bzw.  $U'(0-)$  die rechts- bzw. linksseitige Ableitung der Nutzenfunktion  $U(0)$ . Nun ist

$$(6) \quad \psi'\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) = -\frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\beta^2},$$

ein Ausdruck, der auch zu

$$(7) \quad \psi' \left( \frac{\mu}{\sigma} \right) = \frac{\beta'}{\beta} \left( -\frac{\alpha'}{\beta'} + \frac{\alpha}{\beta} \right)$$

umgeformt werden kann. Berücksichtigt man die in Gleichung (B 2) (S. 173) des Textes angegebenen Werte der 1. und 2. Ableitung von  $U(\cdot)$ , dann läßt sich der in (7) enthaltene Quotient  $-\alpha'/\beta'$  als

$$(8) \quad -\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{g+h}{i+j} = \frac{g}{i} \frac{i}{i+j} + \frac{h}{j} \frac{j}{i+j}$$

mit

$$(9) \quad g \equiv - \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} f_z(z) z \varepsilon (1-\varepsilon) \left( \frac{\mu}{\sigma} + z \right)^{-(1+\varepsilon)},$$

$$(10) \quad i \equiv \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} f_z(z) \varepsilon (1-\varepsilon) \left( \frac{\mu}{\sigma} + z \right)^{-(1+\varepsilon)},$$

$$(11) \quad h \equiv -f_z \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) (1-\varepsilon) \frac{\mu}{\sigma} \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \alpha^{-\varepsilon},$$

$$(12) \quad j \equiv -f_z \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) (1-\varepsilon) \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \alpha^{-\varepsilon}$$

schreiben, wobei

$$U'(0+) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} U'(\alpha) = (1-\varepsilon) \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \alpha^{-\varepsilon}$$

gesetzt wurde. Über die Größe der Quotienten  $g/i$  und  $h/j$  kann folgendes gesagt werden:

Zu  $g/i$ : Für den Fall der „abgeschnittenen“ Dichtefunktion, also  $f_z(-\mu/\sigma) > 0$ , der in diesem Zusammenhang die Normalsituation einer Verteilung darstellt, die zwischen ihren Ober- und Untergrenzen nirgends eine Dichte von 0 aufweist, ist  $g/i$  im Anhang 2 bereits berechnet worden. (Man substituiere  $g/i \equiv A$ ,  $z \equiv w$ ,  $\mu \geq \sigma \equiv y$ ,  $f_z(\cdot) \equiv f_w(\cdot)$ ,  $(1+\varepsilon) \equiv \Theta$ , wobei  $0 < \varepsilon < 1$ , und kürze  $\varepsilon(1-\varepsilon)$  heraus.) Das Ergebnis (Gleichung (24) des Anhangs 2) lautet  $g/i = \mu/\sigma$ . Wenn jedoch, um einen immerhin vorkommenden Fall zu betrachten,  $f_z(-\mu/\sigma) = 0$ , dann nimmt  $g/i$  möglicherweise einen kleineren Wert an, weil jetzt gerade die am stärksten negative Ausprägung von  $z$  geringer gewichtet wird<sup>1</sup>. Doch nimmt  $g/i$  noch nicht den Wert  $-\alpha/\beta = d\mu/d\sigma|_{U(\mu, \sigma)}$  an, der unter  $\mu/\sigma$  liegt (vgl. die Argumentation zu Gleichung (B 7) im Text). Das folgt aus dem Ergebnis des Anhangs 1, wo gezeigt wurde, daß

$$\frac{d \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_{U(\mu, \sigma)}}{d\varepsilon} \Big|_{\frac{\mu}{\sigma}} > 0, \quad \text{wenn } \varepsilon < 1.$$

<sup>1</sup> Vgl. auch die Diskussion von Gleichung (B 6) im Text.

$-\alpha/\beta$  und  $g/i$  haben nämlich eine formal gleiche Struktur und unterscheiden sich vom Wert her nur deshalb, weil die im Zähler und Nenner auftauchenden Exponenten bei  $g/i$  um 1 unter dem Exponenten  $-\varepsilon$  in  $-\alpha/\beta$  liegen. Somit gilt für  $g/i$ :

$$(13) \quad \frac{g}{i} = \Gamma \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_U + (1-\Gamma) \frac{\mu}{\sigma},$$

$$1 > \Gamma \geq 0, \text{ wenn } f_z(-\mu/\sigma) = 0,$$

$$\Gamma = 0, \text{ wenn } f_z(-\mu/\sigma) > 0.$$

Zu  $j/j$ : Hier gilt die einfache Beziehung

$$(14) \quad \frac{h}{j} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{-f_z\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)(1-\varepsilon)\frac{\mu}{\sigma}\alpha^{-\varepsilon}}{-f_z\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)(1-\varepsilon)\alpha^{-\varepsilon}} = \frac{\mu}{\sigma}.$$

Mit Hilfe von (13) und (14) und unter Beachtung der Tatsache, daß  $\beta' = -(i+j)$ , erhalten wir nun für (7):

$$(15) \quad \psi'\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) = -\frac{i+j}{\beta} \left\{ \left[ \Gamma \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_U + (1-\Gamma) \frac{\mu}{\sigma} \right] \frac{i}{i+j} + \frac{\mu}{\sigma} \frac{j}{i+j} - \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_U \right\}.$$

Nach einigen Umformungen wird hieraus

$$(16) \quad \psi'\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) = -\frac{i(1-\Gamma)+j}{\beta} \left( \frac{\mu}{\sigma} - \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_U \right).$$

Nun erinnern wir uns, daß in (12)  $(1-\varepsilon)\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \alpha^{-\varepsilon}$  für  $U'(0+)$  ersetzt worden war. Wegen

$$(17) \quad U'(0+) = -\int_0^{\infty} U''(z) dz = -\int_{-\mu/\sigma}^{\infty} U''\left(\frac{\mu}{\sigma} + z\right) dz$$

$$= \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} \varepsilon(1-\varepsilon) \left(\frac{\mu}{\sigma} + z\right)^{-(1+\varepsilon)} dz$$

wird dann (16) unter Verwendung von (10), (12) und (13) zu

$$(18) \quad \psi'\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{\beta} \int_{\mu/\sigma}^{\infty} \left[ f_z\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) - (1-\Gamma) f_z(z) \right]$$

$$\left(\frac{\mu}{\sigma} + z\right)^{-(1+\varepsilon)} dz \cdot \left( \frac{\mu}{\sigma} - \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_U \right).$$

wobei

$$1 > \Gamma \geq 0, \quad \text{wenn } f_z \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) = 0,$$

$$\Gamma = 0, \quad \text{wenn } f_z \left( -\frac{\mu}{\sigma} \right) > 0.$$

Eine letzte Information, die benötigt wird, bezieht sich auf die Grenzen für  $\beta$ . Hier gilt

$$(19) \quad 0 < \beta < \infty.$$

Daß  $\beta$  strikt positiv ist, liegt auf der Hand. Daß es auch endlich ist, folgt daraus, daß  $\beta$  genau dem Nenner des in Anhang 2 berechneten Ausdruckes  $A$  entspricht, für den die Endlichkeit für den Fall der „abgeschnittenen“ Dichte ( $\infty > f_z(-\mu/\sigma+) > 0$ ) mit den dortigen Gleichungen (14) – (20) gezeigt wurde. Verschwindet die Dichte bei  $z = -\mu/\sigma$ , dann ist  $\beta$  natürlich erst recht endlich.

## Anhang 4 zu Kapitel III

Zu prüfen ist, ob das Integral

$$(1) \quad A = \int_{-y}^{\infty} f_w(y+w)(y+w)^{-\Theta} dw = \int_0^{\infty} f_w(w) w^{-\Theta} dw$$

endlich ist, wobei  $\Theta > 0$  und  $f_w(w)$  eine Funktion mit den Eigenschaften

$$(2) \quad 0 < |f'_w(0)| < \infty,$$

$$(3) \quad f_w(0) = 0,$$

und

$$(4) \quad \left| \int_0^{\infty} f_w(w) dw \right| < \infty$$

sei. Es werde ein  $\Delta$ ,  $\Delta > 0$ , gewählt, so daß

$$(5) \quad |f_w(w)| < \infty, \quad \text{wenn } 0 < w \leq \Delta;$$

sodann werde das Integral (1) folgendermaßen aufgespalten:

$$(6) \quad A = A_1 + A_2,$$

$$(7) \quad A_1 \equiv \int_0^{\Delta} f_w(w) w^{-\Theta} dw,$$

$$(8) \quad A_2 \equiv \int_{\Delta}^{\infty} f_w(w) w^{-\Theta} dw.$$

Da man wegen (4) und  $\Theta > 0$  sofort sieht, daß  $A_2 < \infty$ , geht es nur um  $A_1$ . Definieren wir die Ursprungsstrahlen  $\bar{b}w$  und  $\underline{b}w$ ,  $\bar{b} \geq \underline{b} > 0$ , so daß

$$(9) \quad \underline{b}w \leq |f_w(w)| \leq \bar{b}w, \quad \text{wenn } 0 \leq w \leq \Delta,$$

dann gelten für  $|A_1|$  die Grenzen

$$(10) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \left\{ \underline{b} \int_{\alpha}^{\Delta} w^{1-\Theta} dw \right\} \leq |A_1| \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \left\{ \bar{b} \int_{\alpha}^{\Delta} w^{1-\Theta} dw \right\}$$

oder nach Integration

$$(11) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\underline{b}}{2-\Theta} (\Delta^{2-\Theta} - \alpha^{2-\Theta}) \right\} \leq |A_1| \\ \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\bar{b}}{2-\Theta} (\Delta^{2-\Theta} - \alpha^{2-\Theta}) \right\}, \quad \Theta \neq 2,$$

$$(12) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \{ \underline{b} (\ln \Delta - \ln \alpha) \} \leq |A_1| \\ \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \{ \bar{b} (\ln \Delta - \ln \alpha) \}, \quad \Theta = 2,$$

Hieraus folgt

$$(13) \quad \infty > \frac{\underline{b}}{2-\Theta} \Delta^{2-\Theta} \leq |A_1| \leq \frac{\bar{b}}{2-\Theta} \Delta^{2-\Theta} < \infty, \quad \Theta < 2,$$

$$(14) \quad \infty \leq |A_1| \leq \infty, \quad \text{also } |A_1| = \infty, \quad \Theta \geq 2.$$

Nun soll die Annahme (4) zu

$$(15) \quad \left| \int_0^c f_w(w) dw \right| < \infty, \quad 0 < c < \infty, \\ \left| \int_w^{\infty} f_w(w) dw \right| < x < \infty, \quad w \geq c,$$

verändert werden. Fragen wir nach den Werten für  $\Theta$ , die unter diesen Umständen das Integral

$$(16) \quad \left| \int_0^{\infty} f_w(w) w^{-\Theta} dw \right| < \infty$$

sein lassen, so finden wir wegen

$$\begin{aligned}
 (17) \quad & \left| \int_c^\infty f_w(w) w^{-\Theta} dw \right| < \left| x \int_c^\infty w^{-\Theta} dw \right| \\
 & = \lim_{w^* \rightarrow \infty} \left| x \int_c^{w^*} w^{-\Theta} dw \right| \\
 & = \lim_{w^* \rightarrow \infty} \begin{cases} |x(1-\Theta)(w^{*1-\Theta} - c^{1-\Theta})| & \begin{cases} = \infty, & \Theta < 1, \\ < \infty, & \Theta > 1, \end{cases} \\ |x(\ln w^* - \ln c)| & = \infty, \quad \Theta = 1, \end{cases}
 \end{aligned}$$

die Antwort  $\Theta > 1$ . Der auch unter der Annahme (15)<sup>1</sup> zur Endlichkeit des Integrals (1) führenden Wertebereich für  $\Theta$  ist dann wegen (13) und (17):

$$(18) \quad 1 < \Theta < 2.$$

<sup>1</sup> Annahme (4) und Annahme (15) kennzeichnen die für das Integral in Gleichung (B9) des Textes möglichen Fälle.