Ökonomische Entscheidungen bei Ungewißheit

von Hans-Werner Sinn

J. C. B. Mohr (Paul Siebeck): Tübingen 1980

Kapitel 2: Rationalverhalten bei Risiko

Zweites Kapitel

Rationalverhalten bei Risiko

Im ersten Kapitel wurde eine Reduktion allgemeiner Entscheidungsprobleme bei Unsicherheit auf den reinen Risikofall vorgenommen. Die sich anschließende Frage ist, wie ein ökonomischer Entscheidungsträger objektive Risiken bewertet, d.h. welche Eigenschaften das Präferenzfunktional $R(.)$ im Fall objektiver Wahrscheinlichkeiten aufweist. In diesem Kapitel versuchen wir, eine Teilantwort zu geben, die die Grundregeln für rationale Entscheidungen bei Risiko festlegt. Im nächsten Kapitel wird es dann darum gehen, eine ergänzende Hypothese über die Präferenzen ökonomischer Entscheidungsträger zu formulieren.

Um dem Problem mehr Struktur zu geben, als es im ersten Kapitel nötig war, nehmen wir an, daß der Ergebnisvektor einer Wahlhandlung als (objektive) Wahrscheinlichkeitsverteilung von Periodenendvermögen, V, vorliegt[1]. Die Entscheidungsregel bei Unsicherheit lautet dann (in verkürzter Schreibweise)

$$\max R(V)$$

oder in Worten: Wähle aus der Menge der verfügbaren Handlungsalternativen eine solche aus, die zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung des Periodenendvermögens führt, deren Präferenzfunktional $R(.)$ von keiner anderen Verteilung übertroffen wird. Mit der Beschränkung auf Vermögensverteilungen sind natürlich einige Problemkreise wie z.B. Entscheidungen über Leben und Tod ausgeschlossen, doch für typische ökonomische Risikoprobleme wie die der Portefeuilleanalyse, Versicherungsnachfrage, Spekulation und dergleichen ist die Beschränkung meistens belanglos.

Gemäß der Formulierung des Entscheidungsproblems im ersten Kapitel unterstellen wir im Prinzip, daß V eine diskrete Zufallsvariable ist, die alternative Ausprägungen v mit bekannter Wahrscheinlichkeit $W(v)$ annimmt. Für analytische Zwecke ist es indes meistens einfacher, mit kontinuierlichen Verteilungen zu arbeiten, die man sich als Approximation

[1] Eine Definition des verwendeten Vermögensbegriffs wird zu Beginn des dritten Kapitels gegeben. Derweil reicht eine primitive Notierung.

zugrundeliegender diskreter Verteilungen vorstellen kann[2]. Wir nehmen daher an, daß V wahlweise auch eine kontinuierliche Zufallsvariable sein darf, die eine spezielle Ausprägung v mit bekannter Dichte $f(v)$ zeigt. Wir vereinbaren, die Zufallsvariable V als „Wahrscheinlichkeitsverteilung" zu bezeichnen, ohne damit die Art der Verteilung zu präjudizieren[3].

Statt auf Periodenendvermögensverteilungen hätten wir auch auf Periodeneinkommensverteilungen abstellen können. Bezeichnen wir das (dem Entscheidungsträger bekannte) Periodenanfangsvermögen mit a, das (stochastische) Periodeneinkommen mit Y und unterstellen wir, daß keinerlei Konsum (resp. Ausschüttung) vorgenommen wird, dann gilt ja

$$Y = V - a.$$

Die Vermögens- und die Einkommensverteilung lassen sich also durch bloße Verschiebung im Ausmaß a ineinander überführen. Welche Vorstellung man wählt, ist weitgehend Geschmacksache. Wegen einer ganz spezifischen Vermögensabhängigkeit der Risikobewertung wird es sich im nächsten Kapitel zeigen, daß es generell günstiger ist, mit der Endvermögensverteilung zu arbeiten. Doch bei der Darstellung einiger in der Literatur vorgeschlagener Präferenzfunktionale ist es besser, auf die Einkommensverteilung abzustellen. Wir erlauben uns daher, das Entscheidungsproblem bei Risiko als $\max R(Y)$ zu formulieren, wenn dies als zweckmäßig erscheint.

Problematisch ist es anzunehmen, daß der Entscheidungsträger während der Betrachtungsperiode keinen Konsum vornimmt. Realistischerweise muß man wohl davon ausgehen, daß er simultan mit der Auswahl des optimalen Risikoprojekts auch seinen Periodenkonsum festlegt. Wir abstrahieren aber vorläufig von diesem Problem. Im Kapitel IV wird die Konsumentscheidung im intertemporalen Ansatz voll berücksichtigt, und es wird sich erweisen, daß unsere Abstraktion gar nicht so streng ist, wie es jetzt den Anschein haben mag.

---

[2] Praktisch kann man die Approximation so vornehmen: Zunächst wird die Zahlengerade in Klassen der Breite Δ unterteilt. Sodann wird die Wahrscheinlichkeit aller in eine solche Klasse fallenden Vermögensgrößen addiert und dieser Klasse zugerechnet. Schließlich wird eine Funktion $f(v)$ gesucht, so daß für eine Klasse mit der Mitte $\bar{v}$ und der Wahrscheinlichkeit $W(\bar{v})$ die Beziehung

$$W(\bar{v}) = \int_{\bar{v}-\Delta/2}^{\bar{v}+\Delta/2} f(v)dv$$

gilt, welche impliziert, daß

$$f(v) \approx \frac{W(\bar{v})}{\Delta}.$$

[3] Im Unterschied zu diesem Sprachgebrauch wird häufig auch das Integral $\int_0^v f(z)dz$ als „Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen V" bezeichnet.

In der Literatur sind verschiedene Vorschläge zur Spezifikation des Präferenzfunktionals $R(V)$ gemacht worden. Ziemlich unversöhnlich stehen sich drei Typen von Entscheidungskriterien bei Risiko gegenüber:

- Die *zweiparametrisch-substitutionalen Kriterien.* Aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung werden zwei Kennziffern für „Risiko" und „Ertrag" gebildet, die dann mittels einer substitutionalen Präferenzfunktion bewertet werden.
- Das *Kriterium der lexikographischen Präferenztheorie.* Es werden Präferenzfunktionen über die Wahrscheinlichkeiten für das Überschreiten kritischer Vermögensgrenzen gebildet.
- Das *Erwartungsnutzenkriterium.* Mit Hilfe einer vorgegebenen Nutzenfunktion wird die Endvermögensverteilung in eine Nutzenverteilung verwandelt, deren mathematische Erwartung als Präferenzfunktional dient.

In der Tab. 1 wird eine Übersicht über die in der Literatur vorgeschlagenen Entscheidungskriterien gegeben. Die zum Verständnis der Angaben benötigte Symbolik wird an einer beispielhaft in der Abb. 1 dargestellten Verteilung sowie im Anschluß an die Tab. 1 erläutert. Dabei wird, soweit zweckmäßig, auf das Periodenendvermögen V abgestellt, selbst wenn die Vorschläge ursprünglich in Termini von Vermögensänderungen (Y) formuliert wurden. Bei den Kriterien b) und e) ist dieser Weg nicht zweckmäßig, weil negative und positive Vermögensänderungen unterschieden werden müssen.

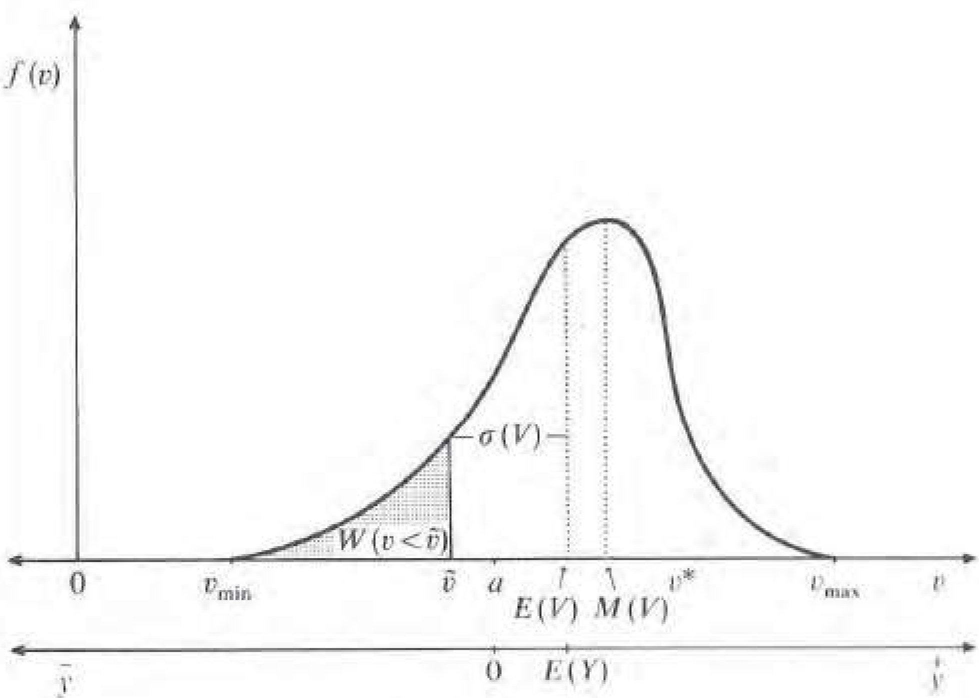


Abbildung 1

Tabelle 1
Präferenzfunktionale

zwei-parametrisch-substitutionale Kriterien	a) $U[M(V), v_{\max} - v_{\min}]$	LANGE (1943)
	b) $U[E(Y), -\int_{-\infty}^{0} y f(y+a)\, dy]$	DOMAR und MUSGRAVE (1944)
	c) $U[\mu, \sigma]$	FISHER (1906, S. 406–410) HICKS (1933), MARSCHAK (1938), STEINDL (1941), TINTNER (1941), LUTZ (1951, S. 179–192), MARKOWITZ (1952a), TOBIN (1958)
	d) $U[\mu, \int_{-\infty}^{v^*} (v-v^*)^2 f(v)\, dv]$	MARKOWITZ (1970, S. 188–201)
	e) $U(\bar{y}^*, \overset{+}{y}{}^*)$	SHACKLE (1952, S. 9–31), KRELLE (1957), SCHNEIDER (1964, S. 89–133)
lexiko-graphisches Kriterium	f) $U[W(v \geq \bar{v}), \ldots]$	H. CRAMÉR (1930, S. 10 u. 38), R. ROY (1952), ENCARNACIÓN (1965), HAUSSMANN (1968/69), NACHTKAMP (1969, S. 117–123, 145)
Erwartungs-nutzenkriterium	g) $E[U(V)]$	G. CRAMER (1728), D. BERNOUILLI (1738), VON NEUMANN und MORGENSTERN (1947, S. 17–29, 617–632)

V	Zufallsvariable „Periodenendvermögen"	$\bar{Y}, \bar{y}$	Verlust (Absolutwert der strikt negativen Werte von Y bzw. y)
v	Ausprägungen von V	$\overset{+}{Y}, \overset{+}{y}$	Gewinn (positive Werte von Y bzw. y einschließlich Nullgewinn)
a	Periodenanfangsvermögen	$\bar{y}^*$	Fokusverlust, äquivalenter Verlust
$Y = V - a$	Zufallsvariable „Periodeneinkommen", „Vermögensänderung"	$\overset{+}{y}{}^*$	Fokusgewinn, äquivalenter Gewinn
y	Ausprägung von Y	$M(V)$	Modus (dichtester Wert) von V
$v_{\max}, v_{\min}$	obere, untere Schranke der Vermögensverteilung		
$\bar{v}$	Ruingrenze		
v^*	kritische Vermögensgrenze		

$W(v > \bar{v}) = \int_{\bar{v}}^{+\infty} f(v)\, dv$ Überlebenswahrscheinlichkeit

$\mu \equiv E(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} v f(v)\, dv$ Erwartungswert von V (analog ist $E(Y)$ definiert)

$\sigma^2(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} [v - E(V)]^2 f(v)\, dv$ Varianz von V

$\sigma \equiv \sigma(V) = \sqrt{\sigma^2(V)}$ Standardabweichung von V

Die genannten Kriterien sollen in den nachfolgenden Abschnitten diskutiert werden[4]. Nicht mehr betrachtet werden jene Präferenzfunktionale, die für die Bewertung unbekannter Wahrscheinlichkeitsverteilungen konstruiert wurden[5]. Da wir zeigen konnten, daß es in jedem Fall möglich ist, äquivalente objektive Wahrscheinlichkeiten abzuleiten, lägen sie von vornherein aussichtslos im Rennen.

Auch das sog. *Erwartungswert-* oder auch *Mittelwertkriterium* $R(V) = E(V) = \mu$ läuft sozusagen außer Konkurrenz. Es ist in der Version $E(Y)$ das klassische Präferenzfunktional für die Bewertung von Glücksspielen und verdankt seine Bedeutung dem Umstand, daß bei fortlaufender Durchführung eines Spiels der Durchschnittsgewinn stochastisch gegen den erwarteten Gewinn konvergiert[6], doch da Mehrfachrisiken vorläufig noch ausgeklammert bleiben sollen, entfällt das Argument. Das Kriterium hat natürlich auch bei einmaligen Risikosituationen eine gewisse Plausibilität, denn es kürt den Schwerpunkt der zu bewertenden Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Präferenzfunktional. Ähnlich plausibel sind auch andere Lageparameter wie der Modus oder der Median. Die Brauchbarkeit solcher einfacher Lageparameter muß aber in Zweifel gezogen werden, wenn man bedenkt, daß sie eine Indifferenz des Entscheidungsträgers zwischen einer möglicherweise erheblich streuenden Wahrscheinlichkeitsverteilung und einem sicheren Betrag von der Höhe des Lageparameters implizieren. Eine solche Indifferenz läßt sich nicht normativ begründen und widerspricht auch aller Erfahrung. Für die Unzulänglichkeit der mathematischen Erwartung liefert die Existenz von Versicherungsunternehmen einen deutlichen Hinweis, denn dort müssen die Prämieneinnahmen die Schadenszahlungen auf Dauer übersteigen, was vom Standpunkt des Versicherten heißt, daß die Prämie größer als der erwartete Entschädigungsanspruch ist, also ein „Spiel" mit negativem Erwartungsgewinn eingegangen wird oder von zwei Endvermögensverteilungen diejenige mit dem kleineren Erwartungswert gewählt wird. Will man diesen Umstand nicht dadurch erklären, daß die Versicherungsnehmer die objektive Schadenswahrscheinlichkeit systematisch überschätzen, dann muß man Präferenzfunktionale konstruieren, die spezifische Risikofurcht zulassen, indem sie auch die Streuung der Endvermögensverteilung bewerten. Alle nun zu diskutierenden Kriterien genügen diesem Anspruch.

---

[4] Vgl. auch die Übersichten von ARROW (1951), SCHNEEWEISS (1967a, S. 20–26) und MARKOWITZ (1970, S. 286–297).

[5] Vgl. S. 23.

[6] Vgl. Kap. IV A.

Abschnitt A
Die zweiparametrisch-substitutionalen Kriterien

Ein naheliegender Weg zur Berücksichtigung unerwünschter Streuungen besteht darin, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung durch einen Parameter zur Messung eines mittleren Ertrages (K_1) und einen anderen Parameter zur Erfassung des Risikos (K_2) darzustellen und dann eine Nutzenfunktion über diese Parameter anzunehmen:

$$(1) \qquad R(V) = U(K_1, K_2).$$

So wird bei den Kriterien a) bis e) der Tab. 1 verfahren. Natürlich wird immer $U_1 > 0$ unterstellt[1]. Der Einfluß des zweiten Arguments ist nicht ganz so selbstverständlich, so daß man lieber allgemein die Fälle

$$(2) \qquad U_2 \begin{cases} <0 & \text{Risikofurcht} \\ =0 & \text{Risikoneutralität} \\ >0 & \text{Risikovorliebe} \end{cases}$$

unterscheidet. Freilich wird durchweg, wegen des Versicherungsphänomens wohl zu Recht, allein der Fall $U_2 < 0$ für praktisch relevant gehalten. Wir wollen uns daher im folgenden mit den anderen Möglichkeiten nicht mehr aufhalten.

Gebräuchlich ist die Abbildung der Präferenzstruktur in einem K_1-K_2-Diagramm mit Hilfe von Indifferenzkurven, auf denen definitionsgemäß $R(V) = U(K_1, K_2) = \text{const.}$ Sie haben im Bereich von Null verschiedener Werte[2] von K_2 eine positive Steigung,

$$(3) \qquad \left.\frac{dK_1}{dK_2}\right|_{U=\text{const.}} = -\frac{U_2}{U_1} > 0,$$

und es wird wegen einer "increasing willingness to bear uncertainty"[3] in der Regel zusätzlich eine Krümmung der Indifferenzkurven unterstellt, wie es die Abb. 2 zeigt[4].

[1] Mit f_i bezeichnen wir die Ableitung einer Funktion $f(.)$ nach ihrem i-ten Argument. Sinngemäß sagt f_{ij}, daß erst nach dem i-ten und dann nach dem j-ten Argument abgeleitet wurde.

[2] Wir werden später sehen, daß beim μ-σ-Kriterium die Indifferenzkurven senkrecht in die μ-Achse einmünden müssen. Vgl. Gleichung (II D 52) S. 121.

[3] LANGE (1949, S. 183).

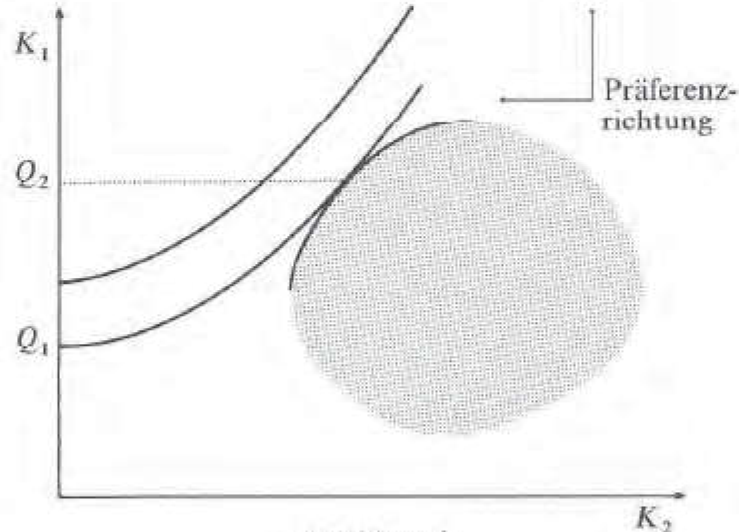


Abbildung 2

Neben den Indifferenzkurven enthält das K_1-K_2-Diagramm auch einen sog. Möglichkeitsbereich, der aus Punkten besteht, die jeweils eine erreichbare Wahrscheinlichkeitsverteilung und damit ebenso eine Zeile der Ergebnismatrix abbilden. Aus diesem Möglichkeitsbereich läßt sich mit Hilfe der Indifferenzkurven leicht die beste Wahrscheinlichkeitsverteilung isolieren. Bei einem Kontinuum von Verteilungen verfährt man so, daß mit der nordöstlichen Begrenzung des Möglichkeitsbereichs zunächst die sog. Effizienzgrenze ermittelt und dann per Tangentiallösung (mindestens) ein Punkt auf der Effizienzgrenze als optimal festgestellt wird.

Bei den Kriterien a) bis d) gibt der Startpunkt (z. B. Q_1) einer Indifferenzkurve auf der K_1-Achse das sogenannte *Sicherheitsäquivalent*, $S(V)$, aller Vermögensverteilungen an, deren Abbildung gerade auf die Indifferenzkurve fällt. Das Sicherheitsäquivalent ist ein mit Sicherheit erreichbares Endvermögen, das diesen Verteilungen gleichwertig ist. Die Differenz zwischen dem Wert des Lageparameters und dem Sicherheitsäquivalent (z. B. $\overline{Q_1Q_2}$) be-

[4] Wegen

$$\left.\frac{d^2K_1}{dK_2^2}\right|_U = \frac{\partial}{\partial K_2}\left(\left.\frac{dK_1}{dK_2}\right|_U\right) + \left.\frac{dK_1}{dK_2}\right|_U \frac{\partial}{\partial K_1}\left(\left.\frac{dK_1}{dK_2}\right|_U\right)$$

$$= \frac{-U_1^2 U_{22} + 2U_{12}U_1U_2 - U_2^2 U_{11}}{U_1^3} > 0$$

bedarf es zur Begründung der Krümmung der Indifferenzkurven einer kardinalen Nutzenfunktion $U(K_1, K_2)$ mit wenigstens einer negativen partiellen zweiten Ableitung oder Kreuzableitung. Nur bei DOMAR und MUSGRAVE (1944, S. 402) werden die hinreichenden Annahmen $U_{22} < 0$, $U_{11} < 0$ und $U_{12} = 0$ genannt.

zeichnen wir als den *subjektiven Risikopreis*, π. Der subjektive Risikopreis mißt also jene Verringerung des Lageparameters, die man beim Austausch der Wahrscheinlichkeitsverteilung gegen ein sicheres Vermögen gerade noch hinnehmen würde.

1. *Das Kriterium von Lange*

$$R(V) = U\left[M(V), v_{\max} - v_{\min}\right]$$

LANGE (1943) nimmt an, daß der Entscheidungsträger im allgemeinen mit einer (subjektiven) Wahrscheinlichkeitsverteilung rechnet. Zur analytischen Vereinfachung schränkt er die Annahme aber in der Weise ein, daß nur die *Spannweite* und der *Modus* bekannt sind (S. 182).

Die Frage ist, ob solch eine Vereinfachung nicht wesentliche Informationen unterdrückt. Sie tut es in der Tat, was leicht an der Abb. 3 verdeutlicht werden kann. Die beiden dort eingezeichneten Wahrscheinlichkeitsverteilungen A und B kann man sich durch Spiegelung an einer Senkrechten über dem Modus entstanden denken. Sie sind daher in bezug auf die von Lange berücksichtigten Verteilungsparameter als gleich anzusehen. Dennoch ist aber Verteilung B ganz offenkundig besser als A. Bei der Verteilung B treten nämlich Werte von $v < M(V)$ mit einer kleineren, der Wert $v = M(V)$ mit der gleichen und Werte von $v > M(V)$ mit einer größeren Wahrscheinlichkeitsdichte als bei der Verteilung A auf.

Langes Kriterium hat denn auch in der Literatur keinen Anklang gefunden.

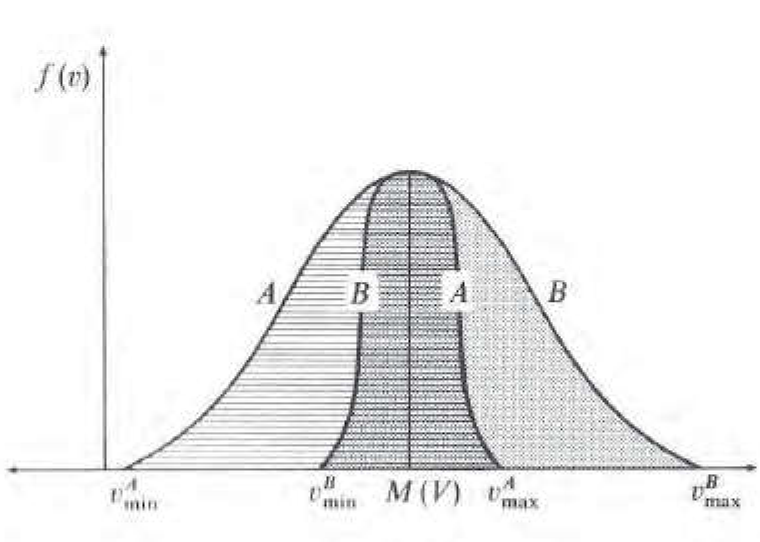


Abbildung 3

2. *Das Domar-Musgrave-Kriterium*

$$R(V) = U\left[E(Y), -\int_{-\infty}^{0} y f(y+a)\, dy\right]$$

Als Ertragsmaß (K_1) behalten DOMAR und MUSGRAVE (1944) das klassische Maß $E(Y)$ bei[5]. Was das richtige Risikomaß (K_2) angeht, sind sie der Meinung, daß es zum einen auf die Verlustwahrscheinlichkeit, zum anderen aber auf die erwartete Höhe des Verlustes ankomme[6]. Daher sei es ein natürliches Konzept, die Summe der Produkte aus allen möglichen Verlusten und ihren Wahrscheinlichkeiten als Risikomaß zu verwenden. Da die Verlustwahrscheinlichkeit als

$$W(y<0) \equiv \int_{-\infty}^{0} f(y+a)\, dy \tag{4}$$

definiert ist und die Verlusterwartung als

$$E(\bar{Y}) \equiv \frac{-\int_{-\infty}^{0} y f(y+a)\, dy}{W(y<0)}, \tag{5}$$

kann das Risikomaß als *Produkt aus Verlusterwartung und Verlustwahrscheinlichkeit* geschrieben werden:

$$K_2 = E(\bar{Y})\, W(y<0) \tag{6}$$

Es ist unschwer zu erraten, warum ein solcher Ansatz gewählt wurde, wenn man weiß, daß Domar und Musgrave u.a. die Auswirkung einer Einkommensteuer (ohne Verlustausgleich) auf die Bewertung gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilungen prüfen wollen. Bei der gewählten Definition bleibt nämlich das „Risiko" von der Steuer unberührt, was eine erhebliche analytische Vereinfachung bedeutet. Die meisten anderen Risikomaße hätten da mehr Schwierigkeiten bereitet.

[5] In Wahrheit formulieren Domar und Musgrave ihre Präferenzfunktional in Termini von Vermögensprozenten (vgl. S. 402). Da sie aber durchweg bei gegebenem a argumentieren, ist diese Spezialität hier belanglos.

[6] Ein Präferenzfunktional, das auf dem Erwartungswert und der Verlustwahrscheinlichkeit basiert, wird von SCHNEEWEISS (1967a, S. 57–60) diskutiert, ist aber auch schon kurz von A.D. ROY (1952, S. 433) erwähnt worden. Auch ALLAIS (1952, S. 317–320) zieht es in Erwägung; siehe dazu die Diskussionsbeiträge von Marschak, Allais und Savage zu SAMUELSON (1952a, S. 151–155).

Die Schwäche des Ansatzes ist denn auch nicht schwer zu finden. Definiert man analog zu (5) die mathematische Erwartung für positive Vermögensänderungen als

$$E(\overset{+}{Y}) \equiv \frac{\int_{0}^{+\infty} y\, f(y+a)\, dy}{W(y \geq 0)}, \tag{7}$$

dann wird das Präferenzfunktional zu

$$R(V) = U\left[W(y \geq 0)\, E(\overset{+}{Y}) - W(y<0)\, E(\overset{-}{Y}),\ W(y<0)\, E(\overset{-}{Y})\right]. \tag{8}$$

Danach darf der Verlauf einer Dichtefunktion für positive wie für negative Vermögensänderungen beliebig modifiziert werden, wenn nur die jeweiligen Teilerwartungswerte und die Verlustwahrscheinlichkeit unverändert bleiben. Damit sind wir wieder, wenn auch auf einer höheren Stufe, bei der Unzulänglichkeit der mathematischen Erwartung als Präferenzfunktional angekommen. Populär ist daher auch der Domar-Musgrave-Ansatz nicht geworden[7].

3. *Das μ-σ-Kriterium*

$$R(V) = U\left[E(V), \sigma(V)\right]$$

Fisher (1906, S. 406–410) war wohl der erste, der vorschlug, die Bewertung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen von ihrem *Mittelwert* $(\mu \equiv E(V))$ und ihrer *Standardabweichung* $(\sigma \equiv \sigma(V) \equiv E\{[V-E(V)]^2\})$ abhängig zu machen. Später wurde dieser Ansatz aber auch von Hicks (1933), Marschak (1938), Steindl[8] (1941), Tintner (1941) und F. und V. Lutz (1951, S. 179–192) diskutiert. Seit seiner Anwendung auf die Probleme der Portefeuilleanalyse durch Markowitz (1952a) und Tobin (1958) ist er zu dem am häufigsten benutzten zweiparametrischen Ansatz avanciert.

Im Vergleich zum Risikomaß von Domar und Musgrave weist die Standardabweichung den Vorzug auf, daß sie auch auf eine Streuungsveränderung bei gegebenen Teilerwartungswerten für positive und negative Ver-

[7] Verwendet wurde der Ansatz noch einmal von Brown (1957/58). Eine ausführliche Kritik findet man bei Richter (1959/60).

[8] Steindl entwickelt ein etwas verklausuliertes μ-σ-Kriterium. Reduziert man seinen Mehrperiodenansatz auf eine Periode (gemäß unserer Annahme), dann gilt bei ihm (S. 47)

$$R(V) = S(V) = a + \frac{\mu - a}{1 + r + h(\sigma)} \equiv U(\mu, \sigma),$$

wobei r den Zinssatz und $h(.)$ einen subjektiven Risikoaufschlag angibt. Wegen $h'(.)>0$ und $h''(.)>0$ (S. 50f.) ergeben sich jedoch die normalen Eigenschaften der mögensänderungen und bei gegebener Verlustwahrscheinlichkeit reagiert. Das sieht man sogleich, wenn man die Gesamtvarianz zu

$$\sigma^2(V) = W(y<0)\left[\sigma^2(\overset{-}{Y}) + E^2(\overset{-}{Y})\right] + W(y \geq 0)\left[\sigma^2(\overset{+}{Y}) + E^2(\overset{+}{Y})\right] - E^2(Y) \tag{9}$$

zerlegt[9]. Werden nämlich bei gegebener Verlustwahrscheinlichkeit und gegebenen Teilerwartungswerten für positive und negative Vermögensänderungen, also bei $W(y<0)$, $E(\overset{-}{Y})$, $E(\overset{+}{Y}) = \text{const.}$, die Teilstreuungen $\sigma^2(\overset{-}{Y})$ und $\sigma^2(\overset{+}{Y})$ verändert, dann ändert sich die Gesamtstreuung in dieselbe Richtung; das Domar-Musgrave-Risikomaß hätte diese Änderung ja nicht registriert.

Es lassen sich aber auch andere Fälle konstruieren, bei denen das μ-σ-Kriterium vergleichsweise schlecht abschneidet. Spiegeln wir z. B. die Verteilung A der Abb. 4 an dem Lot auf ihren Erwartungswert, so daß die Verteilung B entsteht, dann bleiben der Erwartungswert, die Standardabweichung und damit auch der Wert des Präferenzfunktionals unverändert. Währenddessen zeigt das Domar-Musgrave-Maß eine eindeutige Verbesserung an, weil bei gegebenem $E(Y)$ das Risikomaß über $W(y<0)$ und $E(\overset{-}{Y})$ gleichzeitig verringert wird.

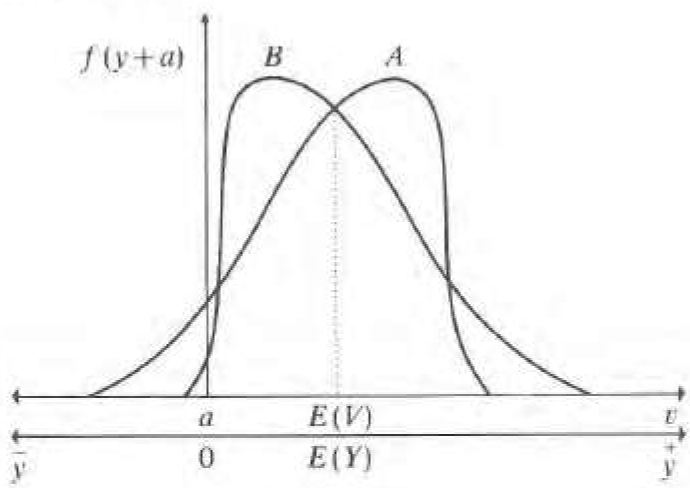


Abbildung 4

Indifferenzkurven im μ-σ-Diagramm:

$$\left.\frac{d\mu}{d\sigma}\right|_U = \frac{\mu - a}{1 + r + h(\sigma)}\, h'(\sigma) > 0$$

und

$$\left.\frac{d^2\mu}{d\sigma^2}\right|_U = \frac{\mu - a}{1 + r + h(\sigma)}\, h''(\sigma) > 0\,.$$

[9] Die Zerlegungsschritte wurden in den Anhang verwiesen. Siehe Anhang 1 zu diesem Kapitel.

4. *Das Mittelwert-Semivarianz-Kriterium*

$$R(V) = U\left[E(V), \int_{-\infty}^{v^*} (v - v^*)^2 f(v)\, dv\right]$$

Weil es nach dem μ-σ-Kriterium gleichgültig ist, ob Streuungsveränderungen im Bereich hoher oder im Bereich niedriger Vermögen vorkommen, schlägt MARKOWITZ (1970, S. 188–201) die *Semivarianz*

$$(10) \qquad \sigma_{v^*}^2(V) \equiv \int_{-\infty}^{v^*} (v - v^*)^2 f(v)\, dv$$

als Ersatz der Standardabweichung bzw. Varianz vor. Über die Lage der entscheidenden kritischen Vermögensgrenze v^* macht er wenig Aussagen. Bemerkenswert ist aber, daß v^* sowohl eine von der zu bewertenden Verteilung unabhängige Größe als auch der Erwartungswert der jeweiligen Verteilung $(v^* = \mu)$ sein darf.

Schreibt man die Semivarianz als[10]

$$(11) \qquad \sigma_{v^*}^2(V) = W(v < v^*)\{\sigma^2(V^*) + [E(V^*) - v^*]^2\} \; ,$$

wobei V^* Vermögenswerte bezeichnet, die kleiner als v^* sind, dann sieht man, daß die Spiegelung der Abb. 4 zu einer Verkleinerung von $W(v < v^*)$, $\sigma^2(V^*)$ und $[E(V^*) - v^*]^2$ führt, wenn $v^* = a$ gesetzt wird. Die Semivarianz zeigt in diesem Fall also die vermutete Verbesserung an.

Darüber hinaus bleibt die Semivarianz aber z. B. auch von der Änderung der Streuung der Verluste bei gleicher Verlusterwartung und gleicher Verlustwahrscheinlichkeit genausowenig unberührt wie die Varianz selbst. Das folgt unmittelbar aus (11).

So hat es den Anschein, daß die Semivarianz die Vorzüge der beiden anderen Risikomaße, die mit dem Erwartungswert zu einem Präferenzfunktional verbunden werden sollen, vereint. Aber auch sie hat ihre Schwächen: Wenn auch die Streuung oberhalb von v^* vergleichsweise unwichtig sein mag, was berechtigt uns, sie völlig zu vernachlässigen?

5. *Das Kriterium der äquivalenten Gewinne und Verluste*

$$R(V) = U(\bar{y}^*, \dot{y}^*)$$

Im Unterschied zu den anderen zweiparametrischen Kriterien werden bei den Kriterien von SHACKLE (1952, S. 9–31), KRELLE (1957) und H. SCHNEIDER (1964, S. 96–186) keine statistischen Verteilungsparameter als Risiko- (K_2)

[10] Siehe Anhang 2 zu diesem Kapitel.

und Ertragsmaß (K_1) verwendet, sondern *subjektiv festgesetzte Kenngrößen* der zu bewertenden Verteilungen. Damit kommen die Präferenzen des Entscheidungsträgers auf zweierlei Weise ins Spiel. Zum einen in der gewohnten Weise über die Indifferenzkurven im K_1-K_2-Diagramm, zum anderen aber über die Modellierung eben dieser Kenngrößen.

5.1. *Shackles Ansatz*

Bleiben wir bei der oben schon getroffenen Feststellung, daß unter Shackles „Grad der potentiellen Überraschung" im Grunde nichts als eine konverse Wahrscheinlichkeitsaussage[11] steckt, dann läßt sich seine Theorie an Hand der Abb. 5 veranschaulichen.

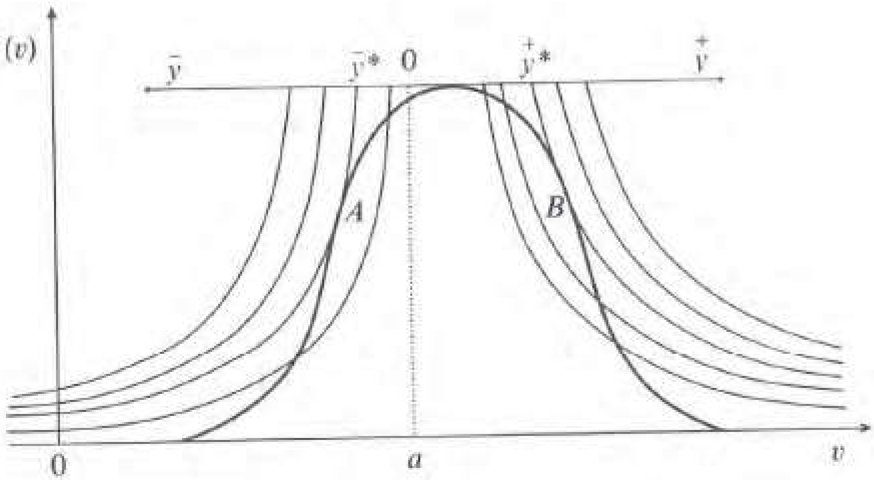


Abbildung 5

Die dort gezeichnete Glockenkurve stellt eine normale Wahrscheinlichkeitsverteilung dar, die in geeigneter Weise durch zwei Parameter, *Fokusgewinn* ($\overset{+}{y}^*$) und *Fokusverlust* ($\bar{y}^*$) genannt, gemessen und in das K_1-K_2-Diagramm der Abb. 2 übertragen werden soll. Die Messung geschieht mit Hilfe sogenannter „Konturlinien", die in unserer Zeichnung in die zur Abszisse parallele Hilfsachse einmünden. Die Konturlinien geben im Bereich der Gewinne solche Kombinationen von Gewinnhöhe und Wahrscheinlichkeitsdichte an, die für den Entscheidungsträger die gleiche Attraktivität besitzen, und im Bereich der Verluste Punkte gleicher Abschreckungskraft. Nach dem Motto (S. 16), daß eine Kette so stark wie ihr schwächstes Glied sei, behauptet Shackle, daß zur Charakterisierung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung nur die nach Maßgabe der Konturlinien höchsten Erregungswerte $\overset{+}{y}^*$ und $\bar{y}^*$ von Bedeutung seien.

[11] Vgl. S. 13 und KRELLE (1957, S. 648–651).

Doch scheint wohl eher diese Behauptung das schwächste Glied in Shackles Gedankenkette zu sein, denn daß dem Entscheidungsträger jede beliebige Umformung der Dichtefunktion gleichgültig ist, wenn nur die Tangentialpunkte A und B unverändert bleiben, kann man sich schwerlich vorstellen.

5.2. *Der Krelle-Schneider-Ansatz*

So ist es nur verständlich, daß Krelle und Schneider den gesamten Verlauf der Wahrscheinlichkeitsverteilung in die Bildung der Kenngrößen $\overset{+}{y}^*$ und $\overset{-}{y}^*$, die sie als *äquivalenten Gewinn* und *äquivalenten Verlust* bezeichnen, einfließen lassen möchten. Zu diesem Zweck formen sie die zu bewertende Wahrscheinlichkeitsverteilung in eine äquivalente Zwei-Punkt-Verteilung um, die je eine Ausprägung über der positiven und der negativen Einkommenshalbachse mit den willkürlich wählbaren Wahrscheinlichkeiten $\overset{+}{w}$ und $\overset{-}{w}$, $0<\overset{+}{w}<1$, $0<\overset{-}{w}<1$, $\overset{+}{w}+\overset{-}{w}=1$, aufweist. Die Ausprägungen sind die gesuchten Werte für $\overset{+}{y}^*$ und $\overset{-}{y}^*$.

Eine bei dem Ansatz auftauchende Schwierigkeit liegt in der Frage der Eindeutigkeit der äquivalenten Zwei-Punkt-Verteilung. Hat man nämlich die ursprüngliche Verteilung durch einen Punkt im $\overset{+}{y}^*$-$\overset{-}{y}^*$-Diagramm abgebildet, so hat man mit der durch diesen Punkt führenden Indifferenzkurve auch den geometrischen Ort aller gleichermaßen gut zur Abbildung geeigneten Punkte gefunden. Der Möglichkeitsbereich besteht dann selbst aus einer Schar von Indifferenzkurven, und die äquivalenten Gewinne und Verluste verlieren ihre Bedeutung.

Um dem Problem aus dem Wege zu gehen, entwickeln Krelle und Schneider (voneinander abweichende) Prozeduren, mit deren Hilfe eine eindeutige[12] äquivalente Zwei-Punkt-Verteilung schrittweise konstruiert wird. Doch zu welchen äquivalenten Gewinnen oder Verlusten man kommt, hängt von nicht weiter begründbaren Besonderheiten dieser Prozeduren ab.

Betrachten wir als Beispiel nur einmal Schneiders Prozedur[13]. Es werden verschiedene Transformationsschritte vorgenommen, deren jeder die Äquivalenz zwischen alter und neuer Verteilung bewahrt. Zunächst werden die

---

[12] SCHNEIDER (1964, S. 110f.) hält es nicht für ausgeschlossen, daß auch bei seiner Konstruktion eine Wahrscheinlichkeitsverteilung durch zwei unterschiedliche Punkte im $\overset{+}{y}^*$-$\overset{-}{y}^*$-Diagramm dargestellt werden kann, je nachdem wie die Transformationsprozedur beginnt. Da Krelle einen (additiven!) von Neumann-Morgenstern-Nutzen unterstellt, taucht bei ihm diese Schwierigkeit nicht auf. Doch da auch aus dem von SCHNEIDER (S. 98–101) akzeptierten Axiomensystem Churchmans ein solcher Nutzen folgt (vgl. CHURCHMAN (1961, S. 225–232)), sind die Befürchtungen grundlos. Vgl. auch S. 101 ff.

[13] SCHNEIDER (1964, S. 101–103, 106–107). Ähnliches ließe sich für KRELLE (1957) zeigen.

Gewinn- und Verlustverteilung durch je eine Ausprägung ersetzt, ohne dabei die Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit als solche zu verändern. Dann werden diese beiden Wahrscheinlichkeiten mit $\overset{+}{w}$ und $\bar{w}$ verglichen. Ist die Gewinnwahrscheinlichkeit größer als $\overset{+}{w}$, so wird sie auf den Wert $\overset{+}{w}$ reduziert, die überschüssige Wahrscheinlichkeit einer „Nullchance"[14] zugewiesen und die Ausprägung über der positiven Einkommenshalbachse so weit verändert, bis wieder Indifferenz zur ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsverteilung besteht. Schließlich wird die Nullchance wieder beseitigt und ihre Wahrscheinlichkeit dazu verwendet, die Wahrscheinlichkeit der Ausprägung über der negativen Halbachse auf den Wert $\bar{w}$ anzuheben. Die dadurch beseitigte Indifferenz muß dann noch durch eine geeignete Veränderung dieser Ausprägung wiederhergestellt werden. Ist die Verlustwahrscheinlichkeit größer als $\bar{w}$, so verfährt man analog.

Warum richtet man gerade eine Nullchance ein und warum keine 14,25 DM-Chance? Warum schlägt man bei der anfänglichen Reduktion der einen Wahrscheinlichkeit auf den Wert $\overset{+}{w}$ bzw. $\bar{w}$ nicht die überschüssige Wahrscheinlichkeit sofort der Ausprägung über der anderen Halbachse zu, wodurch man sich zudem einen Umwandlungsschritt ersparen könnte? Würde man eine dieser Möglichkeiten wählen, also ein anderes „Zwischendepot" für die überschüssige Wahrscheinlichkeit einrichten, dann käme man zu anderen äquivalenten Gewinnen und Verlusten!

Die intuitive Bedeutung subjektiver Zentralwerte haben die äquivalenten Gewinne und Verluste also nicht. Sollte man daher nicht von vornherein auf die Bildung einer äquivalenten Zwei-Punkt-Verteilung verzichten und statt dessen eine äquivalente „Ein-Punkt-Verteilung", nämlich das Sicherheitsäquivalent der zu bewertenden Verteilung, zu konstruieren suchen? Welchen Vorteil hat der Zwischenschritt?

Krelle (1968, vgl. bes. S. 143) sieht offenbar keinen Vorteil mehr, denn er verläßt die Konzeption zugunsten eines weiteren Ausbaus des bereits seinem ersten Ansatz zugrundeliegenden Erwartungsnutzenkonzepts[15]. Doch Schneider weiß die Aufspaltung nutzbringend für die Analyse des Einflusses von Einkommensteuern auf die Risikoprojektwahl zu verwenden: Da Einkommensteuern in der Regel nur die Gewinnverteilung im engeren Sinne ($y>0$) verändern, ist es sicher sinnvoll, zwischen Gewinnen und Verlusten zu differenzieren.

Doch ergeben sich noch ganz erhebliche Anwendungsprobleme: Unter dem Einfluß von Steuern verlagert sich der Möglichkeitsbereich der Abb. 2. Z. B. führt eine 50%-Einkommensteuer ohne Verlustausgleich zu einer Ver-

---

[14] Sie wurde von Krelle (1961, S. 90f.) eingeführt.

[15] Die Abwendung vom ursprünglichen Konzept kündigt sich bereits in Krelles „Preistheorie" (1961, S. 89–107, 588–610) an, indem das $\overset{+}{y}^*$-$\bar{y}^*$-Diagramm fortgelassen wird.

ringerung aller Gewinne der originären Verteilung auf die Hälfte. Um festzustellen, wie sich daraufhin die äquivalenten Gewinne ändern, müßte man die Transformationsprozedur für eine jede originäre Nettoverteilung von Y durchführen. Doch wegen der Allgemeinheit[16] der beschriebenen Transformationsprozedur läßt sich über die Beziehung zwischen den äquivalenten Gewinnen vor und nach Steuererhebung wenig aussagen. Anstatt ihre Anwendbarkeit zu beweisen, muß die Theorie durch eine *ad hoc*-Annahme ersetzt werden: Es wird, freilich nur als Approximation, unterstellt (S. 136 u. 156), daß bei einer Einkommensteuer von 50% auch die äquivalenten Gewinne um 50% fallen.

6. *Möglichkeiten und Grenzen der statistischen Kriterien*

So sind wir wieder bei den auf statistische Verteilungsparameter bezogenen Kriterien, denen wir auch keine vorbehaltlose Zustimmung zollen konnten. Das, was an diesen Kriterien zu bemängeln war, läßt sich auf einen Nenner bringen: Wenn man den *a priori* unwahrscheinlichen Fall[17], daß die Menschen ihre (annahmegemäß existierenden) Präferenzordnungen über Wahrscheinlichkeitsverteilungen nur an bestimmten statistischen Parametern orientieren, ausschließt, dann muß man davon ausgehen, daß eine völlig richtige Rangordnungsfunktion dann und nur dann aufgestellt werden kann, wenn es mit Hilfe ihrer Argumente möglich ist, die zu bewertende Verteilung vollständig zu beschreiben. Für beliebig gestaltete Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist das aber aussichtslos.

Man könnte freilich versuchen, die Zahl der Parameter zu erhöhen. So könnte man z.B. das μ-σ-Kriterium erweitern, indem man auch noch das dritte Moment[18]

$$(12) \qquad E\{[V-E(V)]^3\} ,$$

[16] Da in Krelles Ansatz ein festes Chancenpräferenzfeld unterstellt wird, könnte man dort allerdings im Prinzip die äquivalenten Nettogewinne berechnen.

[17] Es läßt sich zeigen, daß für die unten noch zu entwickelnden Präferenzfunktionen nach dem *Weberschen Gesetz* dieser Fall tatsächlich ausgeschlossen werden muß.

[18] Die Momente werden häufig auch in normierter Form,

$$M_3 \equiv E\left\{\left(\frac{V-E(V)}{\sigma(V)}\right)^3\right\} \quad \text{und} \quad M_4 \equiv E\left\{\left(\frac{V-E(V)}{\sigma(V)}\right)^4\right\},$$

geschrieben. Ein positives Vorzeichen des dritten Moments kennzeichnet eine linkssteile Verteilung. Das vierte Moment gibt an, wie „spitz" eine Verteilung ist. Da für die Normalverteilung $M_4 = 3$ ist, hat man mit dem Maß $M_4 - 3$ eine anschauliche Bezugsbasis:

$$M_4 - 3 \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} 0 \quad \text{heißt} \quad \begin{Bmatrix} \text{„spitzer} \\ \text{„flacher} \end{Bmatrix}$$

als bei der Normalverteilung". Vgl. STANGE (1970, S. 86–89).

das als Maß für die Schiefe bezeichnet wird, das vierte Moment

$$(13) \qquad E\{[V-E(V)]^4\} \ ,$$

das die Wölbung mißt, und weiterhin beliebig viele höhere Momente als Argumente eines Präferenzfunktionals verwendet. Doch obwohl es auf diese Weise gelingt, die Verteilung immer besser zu beschreiben, kann eine völlig exakte Abbildung aller denkbaren Verteilungen erst mit unendlich vielen Momenten gelingen.

Glücklicherweise stellt sich das Problem bei den in der Praxis vorkommenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen aber nicht immer in dieser Form, so daß unsere Kritik weitgehend entkräftet wird. Man wird nämlich häufig eine für das Entscheidungsproblem typische Klasse von Verteilungen angeben können. Um eine Präferenzordnung über die Mitglieder dieser Klasse aufzustellen, kommt man dann unter Umständen mit erheblich weniger Momenten aus. So treten insbesondere häufig lineare Verteilungsklassen auf.

Man sagt, die Zufallsvariablen $V_1, V_2, \ldots$ bilden eine *lineare Klasse*, wenn ihre normierten Werte

$$(14) \qquad Z_i = \frac{V_i - E(V_i)}{\sigma(V_i)} \qquad \forall i$$
$$\text{mit} \quad E(Z) = 0$$
$$\text{und} \quad \sigma(Z) - 1$$

allesamt die gleiche Dichtefunktion $f_z(z;0,1)$ besitzen. Innerhalb einer linearen Klasse lassen sich alle Verteilungen durch Verschiebung und proportionale Dehnung ineinander überführen. Da beispielsweise $E(V)$ als Maß für die Verschiebung und $\sigma(V)$ als Maß für die Dehnung um den Mittelwert fungieren, reichen diese beiden Parameter bereits zur Charakterisierung der gesamten Verteilung und damit auch zur Konstruktion beliebiger Präferenzfunktionale aus[19, 20], wenn $f_z(z;0,1)$ bekannt ist.

---

[19] Dieses Argument wird insbesondere von Tobin (1958, S. 12) zur Verteidigung der μ-σ-Analyse vorgebracht. Auch Fisher (1906, S. 408) hat ähnliches im Sinn. Es bleibt nur unklar, ob er an eine lineare Klasse im allgemeinen oder nur an Normalverteilungen denkt. Die Zahlenbeispiele der Fußnote auf dieser Seite legen letzteres nahe. Vgl. auch Schneeweiss (1967a, S. 121–129).

[20] Thorps (1971, S. 262) Kritik am μ-σ-Kriterium, daß zwischen den Verteilungen V_1 und V_2, die gleichmäßig zwischen den Werten (1,3) und (10,100) streuen, für die also $E(V_1) < E(V_2)$ und $\sigma(V_2) > \sigma(V_1)$ gilt, *a priori* nicht diskriminiert wird, obwohl doch offenbar $V_2 \succ V_1$ vorliegt, ist nicht substantiell: Da die von ihm angenommenen Verteilungen zu einer linearen Klasse von Rechteckverteilungen gehören, deren Mitglieder sich allesamt exakt in das μ-σ-Diagramm abbilden lassen, kann mit Hilfe geeignet gewählter Indifferenzkurven dort die bessere Verteilung ausgewählt werden.

Im Kapitel V dieser Arbeit werden zwei praktische Problemkreise angeführt, bei denen lineare Verteilungsklassen in *exakter* Weise vorkommen. Bedeutung haben die linearen Klassen aber auch, weil Normalverteilungen, die ja eine solche Klasse bilden, vielfach als gute *Approximation* der in der Praxis beobachtbaren Verteilungen gelten können. (Als Beispiel sind die Erträge von Wertpapierportefeuilles anzuführen[21].) Der Grund liegt darin, daß die Verteilungen der Praxis häufig durch Addition unabhängiger Zufallsvariablen entstehen. Addiert man deren nämlich viele, dann nähert sich nach dem *zentralen Grenzwertsatz* von Ljapunow die standardisierte Summenverteilung asymptotisch der Standardnormalverteilung[22]. Vorausgesetzt werden muß freilich, daß die Varianzen der Summanden existieren; da im ökonomischen Bereich alle vorstellbaren Verteilungen irgendwo begrenzt sind, ist diese Voraussetzung immer erfüllt[23].

---

[21] Vgl. Kap. V A.

[22] Die Dichtefunktion der gemäß (14) standardisierten Zufallsvariablen ist im Fall der Normalverteilung

$$f_z(z;0,1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0{,}5\,z^2}.$$

Durch Integration entsteht die zugehörige Verteilungsfunktion

$$W(z<z^*)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z^*}e^{-0{,}5\,z^2}\,dz.$$

Hierauf bezieht sich der *zentrale Grenzwertsatz*. Er besagt, daß für die Summe der unabhängigen (beliebig verteilten) Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit den Ausprägungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} W\left(\sum_{i=1}^{n} x_i<\varepsilon\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_n^*}e^{-0{,}5\,z_n^2}\,dz_n$$

$$\text{mit}\quad z_n^*\equiv\frac{\varepsilon-E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}{\sigma\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}=\frac{\varepsilon-\sum_{i=1}^{n}E(X_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i)}}$$

gilt. Ein Beweis ist bei Fisz (1970, S. 241–251) zu finden. Es muß noch einmal betont werden, daß die *standardisierte* Form der Summenverteilung normal wird. Man kann auch sagen, daß die nicht standardisierte Summenverteilung einer aus der Standardform entwickelten Verteilung mit derselben Streuung relativ immer ähnlicher wird. Das heißt natürlich keineswegs, daß die Abstände zwischen den Punkten gleicher Dichte beider Verteilungen absolut verschwinden.

[23] Vgl. aber Fama (1968, S. 30) und Fama und Miller (1972, S. 259–265).

Wenn auch die vorangehende Argumentation auf das Beispiel der Parameter μ und σ bezogen wurde, so stützt sie doch ebenso die anderen „statistischen" Präferenzfunktionale[24]. Wenn nämlich die standardisierte Form der Verteilungen gegeben ist, dann läßt sich bei bekanntem $E(V)$ die exakte Form der Verteilung V z.B. auch dann bestimmen, wenn man das Risikomaß von Domar und Musgrave oder die Semivarianz kennt[25]. Ja sogar das Kriterium von Lange wäre völlig zufriedenstellend, denn auch mit dem Modus und der Spannweite wäre V bereits eindeutig festgelegt[26].

Damit erscheinen die statistischen zweiparametrischen Kriterien doch wieder in günstigem Lichte. Man sollte aber, was die Möglichkeit einer Normalverteilungsapproximation betrifft, nicht vergessen, daß die Summen, mit denen man es zu tun hat, häufig recht klein sind und daß die einzelnen Summanden in gegenseitiger Abhängigkeit stehen. In diesem Fall ist die Aussage des zentralen Grenzwertsatzes nicht mehr anwendbar. So kann eine Präferenzordnung auf der Basis zweier Parameter häufig nicht mehr als eine Approximation an die wahre Präferenzordnung sein, immer vorausgesetzt, daß eine solche wahre Ordnung existiert. Man kann die Approximation durch die Berücksichtigung weiterer Verteilungsparameter verbessern. Wie weit man dabei gehen will, ist ein Problem der Forschungsökonomie. Meistens wird es nicht als lohnend empfunden, auch nur einen dritten Parameter in einer ökonomischen Theorie zu benutzen[27]. Mehr noch, der überwiegende Teil aller ökonomischen Theorien beschränkt sich auf nur einen einzigen Parameter, freilich ohne zu sagen, auf welchen. Vielleicht rücken diese Bemerkungen das, wie TOBIN (1969, S. 14) sagt, "modest endeavour of doubling the number of parameters", von dem die hier vorgestellten Autoren getragen wurden, in das rechte Licht.

Abschnitt B
Lexikographische Kriterien

Die bisher untersuchten Entscheidungskriterien haben eines gemeinsam: Es besteht eine Substitutionsbeziehung zwischen Risiko und Ertrag. Das ist bei den lexikographischen Kriterien anders. Bei ihnen geht es vor allem darum, die Wahrscheinlichkeit für das Überschreiten kritischer Vermögens-

[24] Vgl. TOBIN (1958, S. 12).

[25] Es ist freilich zu verlangen, daß die Verteilungen so geartet sind, daß die Risikomaße nicht den Wert 0 annehmen.

[26] Bei der (unbeschränkten) Normalverteilung müßte man allerdings die Spannweite durch ein anderes Maß ersetzen; etwa, wie es LANGE (1943, S. 182, Fußnote) vorschlägt, durch den Abstand zwischen dem unteren und oberen Perzentil.

[27] Drei Parameter berücksichtigen aber CRAMÉR (1930, S. 50), MARSCHAK (1938, S. 320), HICKS (1967, S. 117–125) und JEAN (1971).

grenzen zu maximieren. *Safety first* ist ein passendes Schlagwort, um die ihnen zugrundeliegende Präferenz zu charakterisieren. In der einfachsten Form, die wir zunächst diskutieren werden, geht es dabei um eine einzige kritische Grenze, die Ruingrenze ($\bar{v}$). Danach werden wir uns aber auch mit einer modifizierten Version, bei der mehrere Grenzen ins Spiel kommen, beschäftigen.

1. *Die bedingungslose Maximierung der Überlebenswahrscheinlichkeit*

1.1. *Der formale Ansatz*

Die Theorie der lexikographischen Präferenz wurde von René ROY (1943) entwickelt, erhielt ihren Namen jedoch nach der bereits zuvor von HAUSDORFF (1914, S. 78) formalisierten „lexikographischen Anordnung von Mengen"[1]. Die Übertragung auf den Unsicherheitsfall wurde von ENCARNACIÓN (1965) und NACHTKAMP (1969) vorgenommen. Präferenztheoretisch nicht weiter fundierte lexikographische Kriterien für die Entscheidung bei Unsicherheit wurden von CRAMÉR (1930), A. D. ROY (1952) und HAUSSMANN (1968/69) verwendet.

Der Grundgedanke der Theorie läßt sich in Anlehnung an die Formulierung Hausdorffs folgendermaßen darstellen: Es seien zwei Güterbündel (a,b) und (a',b') zu vergleichen, wobei a bzw. a' und b bzw. b' die Mengen der Güter A und B in den beiden Bündeln bezeichne. Eine lexikographische Ordnung besagt dann,

(1) daß $(a,b)\{\gtrless\}(a',b')$,
genau dann,
wenn entweder $a\{\gtrless\}a'$
oder $a=a'$, jedoch $b\{\gtrless\}b'$,
und daß $(a,b)\sim(a',b')$
genau dann, wenn $a=a'$
und $b=b'$.

Die Wahlentscheidung wird also zuerst einmal an Hand der in beiden Bündeln vorhandenen Anzahl der Güter des Typs A vorgenommen. Das Bündel, das hier besser abschneidet, wird in jedem Fall vorgezogen, ganz egal um wieviel besser das andere Bündel mit Gütern vom Typ B ausgestattet sein mag. Erst wenn beide Bündel in bezug auf das „prävalente" Gut A gleich sind, wird das Gut B berücksichtigt[2].

[1] Die Theorie wurde von GEORGESCU-ROEGEN (1954), CHIPMAN (1960), BANERJEE (1964), ENCARNACIÓN (1964a u. b), FERGUSON (1966) u.a. weiterentwickelt.

[2] Ähnlich wie hier beschrieben geht man bei der alphabetischen Ordnung von Wörtern vor. Daher der Name „lexikographische Ordnung".

Welche Implikationen hat dieser Grundgedanke für die Entscheidung bei Unsicherheit? Bezieht man sich auf die Wahlentscheidung einer Unternehmensleitung, dann könnte man A plausiblerweise als das Überlebensziel ansehen, das gegenüber einem beliebigen anderen Ziel B prävalent ist. Gesetzt nun den Fall, es stünde keine Politik zur Wahl, die das Überleben mit Sicherheit garantiert, dann liegt es nahe, wenigstens jene zu wählen, die die Überlebenswahrscheinlichkeit $W(v > \tilde{v})$ maximiert. Diese Wahrscheinlichkeit entspricht dem Parameter a bzw. a' der obigen Formulierung. Analog ist der Parameter b bzw. b' als die Wahrscheinlichkeit für das Erreichen des nachgelagerten Ziels B zu interpretieren; sie bleibt solange unbeachtet, wie eine in bezug auf das Überlebensziel eindeutig beste Politik gefunden werden kann. Das Präferenzfunktional lautet unter dieser Einschränkung also

$$(2) \qquad R(V) = W(v \geq \tilde{v}) = \int_{\tilde{v}}^{\infty} f(v)\, dv.$$

Gegenüber der Grundkonzeption gibt es bei A.D. ROY (1952) freilich noch eine gewisse Modifikation. Er geht nämlich davon aus, daß dem Entscheidungsträger die Varianz und der Erwartungswert, nicht aber die gesamte Gestalt der Endvermögensverteilung bekannt ist. Bei dieser eingeschränkten Information läßt sich nicht mehr die Überlebenswahrscheinlichkeit selbst, sondern nur eine untere Schranke für sie bestimmen. Das geschieht mit Hilfe der Ungleichung von *Tschebyscheff*[3]:

$$(3) \qquad W\left[|v - E(V)| \leq \varepsilon\right] \geq 1 - \left(\frac{\sigma(V)}{\varepsilon}\right)^2, \; \varepsilon > 0.$$

Setzt man $\varepsilon \equiv E(V) - \tilde{v}$ und läßt man die Betragsstriche fort, da nur negative Abweichungen vom Erwartungsungswert interessieren, dann wird die Überlebenswahrscheinlichkeit durch die Beziehung

$$(4) \qquad W\left[E(V) - v \leq E(V) - \tilde{v}\right] = W(v \geq \tilde{v}) \geq 1 - \left(\frac{\sigma(V)}{E(V) - \tilde{v}}\right)^2$$

nach unten hin begrenzt. Da der Ausdruck $(E(V) - \tilde{v})/\sigma(V)$ aus dieser Untergrenze für die Überlebenswahrscheinlichkeit durch eine strikt positive monotone Transformation hervorgeht, kann man ihn mangels einer besseren Lösung als Präferenzfunktional verwenden[4]:

$$(5) \qquad \hat{R}(V) = \frac{E(V) - \tilde{v}}{\sigma(V)}.$$

[3] Die Herleitung findet man z.B. bei STANGE (1970, S. 157f.).

[4] Roys Argumentation bezieht sich im Original statt auf die Untergrenze der Überlebenswahrscheinlichkeit auf die Obergrenze der Ruinwahrscheinlichkeit; es handelt sich dabei natürlich um das gleiche Problem.

Wenn wir auch die Vorstellung, daß der (rationale!) Entscheidungsträger nicht über die Kenntnis subjektiver Wahrscheinlichkeitsverteilungen verfügt, nicht akzeptieren können, so zeigt Roys Ansatz doch immerhin eine nützliche Verwendbarkeit des μ-σ-Ansatzes auf. Roy (S. 434) bemerkt, daß bei der Verwendung von $\hat{R}(V)$ nicht nur die Untergrenze der Überlebenswahrscheinlichkeit, sondern die Überlebenswahrscheinlichkeit selbst maximiert wird, wenn es um eine Auswahl aus der Klasse der Normalverteilungen geht[5]; doch in Wahrheit braucht nicht einmal eine Normalverteilung unterstellt zu werden: Für jede beliebige lineare Verteilungsklasse wird die Überlebenswahrscheinlichkeit mit $\hat{R}(V)$ maximiert[6]. Das läßt sich leicht einsehen, wenn wir uns an Gleichung (A 14) erinnern und (2) in der standardisierten Form

$$(6) \qquad R(V) = \int_{-\hat{R}(V)}^{+\infty} f_z(z;0,1)\,dz$$

aufschreiben. Dieser Ausdruck beweist, daß $\hat{R}(V)$ und $R(V)$ durch eine strikt positive monotone Transformation ineinander überführt werden können, somit also die gleiche Präferenzordnung erzeugen[7].

Die Abb. 6 zeigt, wie sich mit Hilfe des μ-σ-Diagramms die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der größten Überlebenswahrscheinlichkeit auffinden läßt. Die von $\bar{v}$ ausgehenden Strahlen verbinden Punkte gleicher Überlebenswahrscheinlichkeit, denn auf ihnen ist $\hat{R}(V) = \tan\alpha = \text{const.}$[8]. Da die Überlebenswahrscheinlichkeit mit der Vergrößerung des Winkels, den die Geraden mit einer Parallelen zur Abszisse bilden, steigt, ist das sicherste Projekt durch den am weitesten oben liegenden Tangentialpunkt einer Geraden mit dem Möglichkeitsbereich gekennzeichnet.

---

[5] Vgl. Fn. 22, S. 65.

[6] Daß sich die Präferenzstruktur für eine lineare Verteilungsklasse im μ-σ-Diagramm darstellen lassen muß, haben wir im Abschnitt A 6 gesehen.

[7] Hier zeigt sich eine Parallele zu Nachtkamp (1969), bei dem es gelingt, Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Nachfragemengen zu bewerten, ohne daß die Gestalt dieser Wahrscheinlichkeitsverteilungen bekannt zu sein braucht (S. 164–176). Wichtig ist nur, daß alle Nachfrageverteilungen (erstaunlicherweise aber nicht die Gewinnverteilungen) zu derselben linearen Klasse gehören, was über entsprechende Annahmen zur Form des Nachfragefeldes (S. 22–38) sichergestellt ist.

[8] Im Roy-Fall der unbekannten Verteilungsform verbinden in Abb. 6 die Geraden mit positiver Steigung Punkte gleicher Untergrenze und jene mit negativer Steigung Punkte gleicher Obergrenze der Überlebenswahrscheinlichkeit. Die letztgenannte Information ist natürlich uninteressant. Aber auch im Fall positiver Steigung kann man mit der Wahrscheinlichkeitsabschätzung nur etwas anfangen, wenn die Steigung >1 ist, denn anderenfalls würden wir aus (4) ja nur die Information erhalten, daß die Überlebenswahrscheinlichkeit >0 (Steigung $=1$) oder größer als eine negative Zahl (Steigung <1) ist, was ohnehin nicht anders möglich ist.

Bei dem in der Abb. 6 unterstellten konvexen Möglichkeitsbereich findet man ein, gemessen am Ziel der Maximierung der Überlebenswahrscheinlichkeit, eindeutig bestes Projekt, weil es nur einen Tangentialpunkt gibt. Bei anders gestalteten Möglichkeitsbereichen könnten aber auch einmal mehrere Tangentialpunkte vorkommen. In diesem Fall müßten rangniedrigere Ziele zur weiteren Auswahl herangezogen werden. Die von $\tilde{v}$ ausgehenden Geraden sind also keine Indifferenzkurven. „Indifferenz" besteht ja nur in bezug auf das prävalente Ziel. Nach CHIPMAN (1960, S. 202) könnte man die Geraden daher *Pseudo-Indifferenzlinien* nennen.

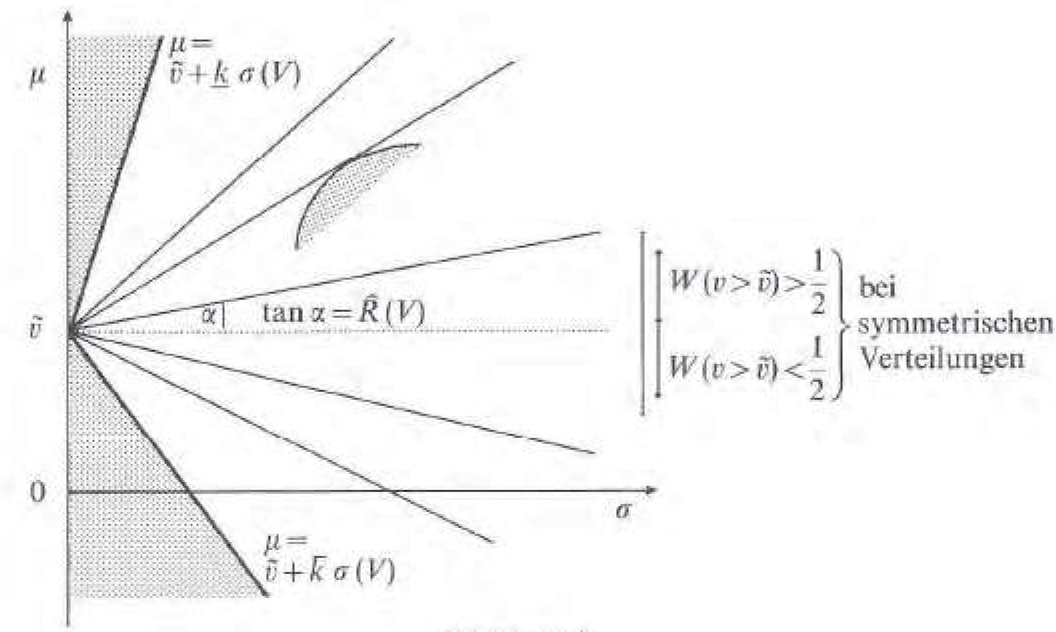


Abbildung 6

Eine eindeutige Lösung des Wahlproblems würde die Zielsetzung der Maximierung der Überlebenswahrscheinlichkeit auch dann nicht bringen, wenn der Möglichkeitsbereich entweder über die obere der in Abb. 6 gezeichneten Begrenzungsgeraden hinausragt oder unterhalb der unteren Begrenzungsgeraden liegt. Solche Begrenzungsgeraden gibt es, wenn die betrachtete lineare Verteilungsklasse nach unten und oben beschränkt ist, wie es die Abb. 7 zeigt. Ist nämlich $-\underline{k}$ die größte untere und $+\bar{k}$ die kleinste obere Schranke der standardisierten Variablen Z, dann gilt für die Überlebenswahrscheinlichkeit

$$(7) \qquad W(v \geq \tilde{v}) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow E(V) \quad \begin{Bmatrix} \geq \tilde{v} + k\,\sigma(V) \\ \leq \tilde{v} - \bar{k}\,\sigma(V) \end{Bmatrix}$$

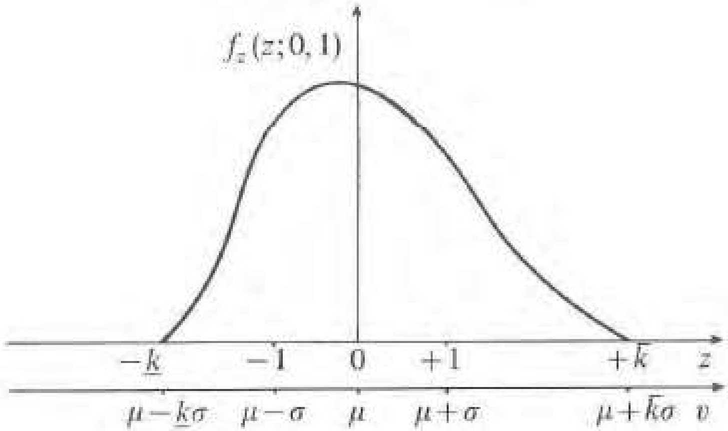


Abbildung 7

Soweit die formalen Aspekte der Theorie. Von sehr viel größerer Bedeutung ist die Frage, ob es tatsächlich eine Ruingrenze gibt, die für das Risikoverhalten der Menschen eine entscheidende Rolle spielt, und wenn ja, welchen Wert sie annimmt.

1.2. *Das Problem der Ruingrenze*

Damit die bedingungslose Maximierung der Überlebenswahrscheinlichkeit einen Sinn erhält, muß es irgendwo eine Ruingrenze geben, unterhalb derer das totale Fiasko eintritt. Das Fiasko muß abrupt an der Grenze eintreten. In welchem Ausmaß sie unterschritten wird, darf nur von zweitrangiger Bedeutung sein. Ebenso ist es mit dem Überleben. Daß man überlebt, ist die Hauptsache, wie gut man überlebt, ist zunächst einmal unwichtig: Eine noch so kleine Verringerung der Überlebenswahrscheinlichkeit bedeutet eine Verschlechterung, selbst wenn man dafür im Überlebensfall alle Reichtümer dieser Erde gewinnt.

Für ein Individuum ist die natürliche Vorstellung des absoluten Fiaskos der physische Tod. Doch um den geht es bei den uns interessierenden wirtschaftlichen Entscheidungen nicht. So können wir uns unter dem Ruin etwas vorstellen, was in den Augen vieler Menschen dem Tod zumindest recht nahe zu kommen scheint: Die Vernichtung der bürgerlichen Existenz durch den Verlust von Hab und Gut. In diesem Fall ist $\tilde{v}=0$.

Ob bei $v=\tilde{v}=0$ tatsächlich eine Ruingrenze im lexikographischen Sinne vorliegt, ist eine empirisch zu beantwortende Frage, die hier letztlich nicht entschieden werden kann. Nur, wenn es eine lexikographische Ruingrenze gibt, dann liegt sie wohl dort. Es gibt freilich einige Hinweise darauf, daß *keine* lexikographische Grenze vorliegt. So fahren z.B. die meisten Menschen wegen oft geringwertiger finanzieller Vorteile mit dem Auto und riskieren dabei ihr Leben oder sie sind häufig nicht bereit, freiwillige Haftpflichtversicherungen abzuschließen, obwohl die Versicherung sie für eine geringe Prämie vor der Gefahr, an den Bettelstab zu geraten, bewahrt. Aber es gibt auch Menschen, die die Haftpflichtversicherung freiwillig abschließen und schon bei dem Gedanken an die Autofahrt zu zittern beginnen. Vielleicht gibt es daher für einige Menschen eine lexikographische Vermögensgrenze und für andere nicht. Wir lassen die Frage offen.

Denken wir statt an die Präferenzen eines Individuums oder eines Haushalts an jene einer Unternehmensleitung, dann verbindet sich mit dem Ruin die Vorstellung, daß das Unternehmen seinen Zahlungsverpflichtungen nicht mehr nachkommen kann und deshalb das Konkursverfahren eröffnet werden muß. Je nach der Lage der Konkursgrenze kann man dabei mit FISHER (1906, S. 82) zwischen der *Pseudoinsolvenz* und der *wahren Insolvenz* unterscheiden. Eine Pseudoinsolvenz wird durch kurzfristige Liquiditätsschwierigkeiten hervorgerufen, ohne daß die Schulden bereits die Höhe des Eigenkapitals erreichen. Mit etwas Nachsicht der Gläubiger kann die Pseudoinsolvenz meistens durch eine Sanierung beseitigt werden. Bei der wahren Insolvenz liegt hingegen eine wirkliche Überschuldung vor: Das Haftungskapital reicht nicht mehr zur Befriedigung der Gläubiger aus.

Mit der Pseudoinsolvenz kann man keine lexikographische Vermögensgrenze begründen, denn gesetzt den Fall, wegen der Uneinsichtigkeit der Gläubiger sei mit der Pseudoinsolvenz tatsächlich die Aufgabe des Unternehmens verbunden, dann wäre eine Unternehmensleitung, deren prävalentes Ziel es ist, diesen Fall zu verhindern, schlecht beraten, würde sie nicht die Liquiditätsplanung mit in den Optimierungskalkül einbeziehen. Dazu ist sie ja ohne weiteres in der Lage, denn sie kann, wenn auch unter Zinsverlust, den Liquiditätsgrad jederzeit durch langfristige Verschuldung und gleichzeitige kurzfristige Kreditvergabe erhöhen. So ist also die Ruingrenze selbst eine Planungsgröße und das Konzept der bedingungslosen Maximierung der Überlebenswahrscheinlichkeit verliert seinen Sinn.

Anders ist es, wenn eine weitere Erhöhung des Liquiditätsgrades nicht mehr möglich ist, weil den Gläubigern keine Sicherheiten mehr geboten werden können. Das ist der Fall, wenn das Volumen der aufgenommenen Kredite dem haftenden Vermögen gleicht. Eine Insolvenz würde dann erst beim völligen Vermögensverlust drohen, und wir kommen ähnlich wie beim Individuum zu dem Schluß: Wenn es eine lexikographische Vermögensgrenze gibt, so bei $v=\bar{v}=0$.

2. *Anspruchsniveaus und Sättigungswahrscheinlichkeiten: Die pragmatische Sicht*

Die bedingungslose Maximierung der Überlebenswahrscheinlichkeit impliziert ein äußerst risikoaversives Verhalten, wie man es bei den Menschen häufig nicht findet und wenn, dann wohl nicht bei dem typischen von SCHUMPETER (1942) wegen seiner Dynamik gepriesenen Unternehmer. In der Abb. 8 wird die Auswirkung der mit der lexikographischen Theorie implizierten Risikoaversion demonstriert. Bei dem dort eingezeichneten Möglichkeitsbereich und $\bar{v}=0$ wählt man Projekt A, obwohl es ein viel geringeres erwartetes Endvermögen als das Projekt B bringt. Das ist wenig plausibel. Wenig plausibel ist weiterhin, daß es keinen subjektiven Spielraum bei der Risikoprojektwahl mehr gibt[9]: Nach den Überlegungen im vorigen Abschnitt ist ja für alle Entscheidungsträger $\bar{v}=0$, so daß sie bei gleichem Vermögen zur gleichen Wahlentscheidung kommen müssen.

Eine naheliegende Modifikation des Ansatzes liegt daher darin, die Ruingrenze durch ein höher gelegenes vom Entscheidungsträger selbst zu bestimmendes *Vermögensanspruchsniveau* zu ersetzen. Für ein Unternehmen könnte man beispielsweise, wie NACHTKAMP (1969, S. 120) es vorschlägt, ein Endvermögen wählen, das durch den Gewinn des Vorjahres erreicht wurde. Oder man könnte mit CRAMÉR (1930, S. 10) und ENCARNACIÓN (1964a, S. 113) jenes Endvermögen nehmen, das zur Beibehaltung der üblichen Entnahmen oder Ausschüttungen ausreicht. In Frage kommen aber auch beliebige andere Anspruchsniveaus. In diesem Fall würde aus dem konvexen Möglichkeitsbereich der Abb. 8 ein Projekt mit einem höheren erwarteten Endvermögen, jedoch auch höherer Standardabweichung gewählt. Die Risikoaversion wäre offenkundig kleiner. Würde man die Grenze gar beim Maximum des Möglichkeitsbereichs ansiedeln, dann wäre jede Risikofurcht eliminiert[10] (Punkt B).

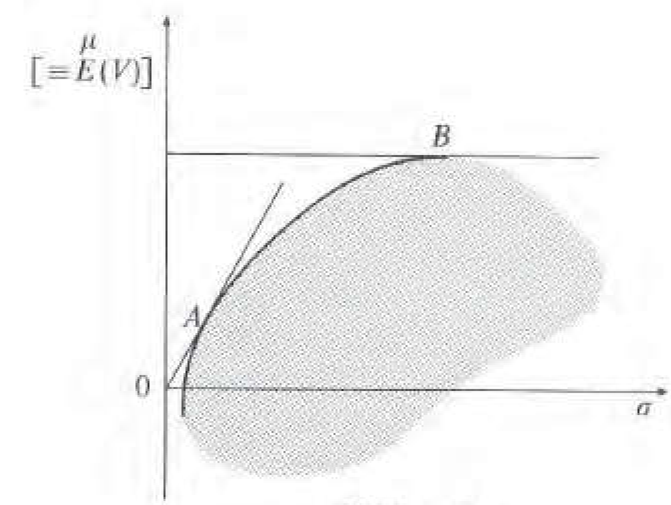


Abbildung 8

[9] Es gibt im Ungewißheitsfall freilich noch insofern einen subjektiven Spielraum, als die Menschen wegen unterschiedlicher Informationen über Risikoprojekte unterschiedliche äquivalente objektive Wahrscheinlichkeiten festsetzen.

[10] Vgl. die Definition der Risikoneigungen zu Beginn des Abschnitts A.

Kann man auch dem Gedanken der Anspruchsniveaus eine gewisse Plausibilität nicht absprechen, so ist es doch fraglich, ob Anspruchsniveaus die strengen Anforderungen einer lexikographischen Vermögensgrenze erfüllen. Sollte man nicht bereit sein, eine winzige Vergrößerung der Wahrscheinlichkeit für das Unterschreiten des Anspruchsniveaus hinzunehmen, wenn einem zum Ausgleich ein Königreich für den Fall versprochen wird, daß die Unterschreitung nicht stattfindet? Die wohl von allen Menschen auf diese Frage gegebene Antwort brauchen wir hier nicht auszuführen.

Akzeptieren wir aber trotz dieser Bedenken einmal ein Anspruchsniveau ($\tilde{v}_2$) als lexikographische Grenze, so dürfen wir nicht übersehen, daß die wirkliche Ruingrenze, nennen wir sie jetzt $\tilde{v}_1$, dadurch nicht außer Kraft gesetzt wird. Ihre Überschreitungswahrscheinlichkeit zu maximieren, bleibt das prävalente Ziel. Es ist also nichts gewonnen.

Der Ausweg aus diesem Dilemma liegt darin, in Analogie zu den von R. Roy (1943) behaupteten Sättigungsmengen beim Güterkonsum auch eine Sättigungsgrenze $W^*(v \geq \tilde{v}_1)$ für die Überlebenswahrscheinlichkeit einzuführen[11]. Alle Projekte mit einer höheren Überlebenswahrscheinlichkeit können dann in bezug auf das prävalente Überlebensziel als gleichwertig angesehen werden, so daß die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Anspruchsniveau zu erreichen als zweites Auswahlkriterium zum Zuge kommt. Man kann sich diese Präferenzstruktur verdeutlichen, wenn man die Hausdorffsche Formulierung (1) zu Rate zieht und für ein zur Wahl stehendes Projekt

$$(8) \qquad a \equiv \min\left[W(v \geq \tilde{v}_1), W^*(v \geq \tilde{v}_1)\right] \\ \text{und } b \equiv W(v \geq \tilde{v}_2)$$

setzt und für ein Vergleichsprojekt a' und b' analog definiert.

Man braucht natürlich nicht bei zwei kritischen Vermögensgrenzen stehen zu bleiben. Auch für die Wahrscheinlichkeit, das Anspruchsniveau zu erreichen, mag es eine Sättigungsgrenze geben, so daß ein weiteres, rangnie-

[11] Als Kritik am Ansatz von A.D. Roy fordert Telser (1955/56, S. 2f.) eine Sättigungswahrscheinlichkeit, nach deren Erreichen die mathematische Erwartung maximiert werden soll. Baumol (1963) möchte als Ergänzung des herkömmlichen μ-σ-Ansatzes für substitutionale Indifferenzkurven die Effizienzgrenze im μ-σ-Diagramm verkürzen, indem jene Projekte ausgesondert werden, die nicht mit einer vorgegebenen Mindestwahrscheinlichkeit die Überschreitung eines kritischen Vermögens sichern. Nachtkamp (1969) entwickelt die Hypothese, daß erst ein Gewinnziel bis zur Erreichung einer Sättigungswahrscheinlichkeit, dann ein Absatzziel bis zum Erreichen einer anderen Sättigungswahrscheinlichkeit und schließlich die Maximierung eines von Neumann-Morgenstern-Indexes angestrebt wird. Eine präferenztheoretische Analyse der Sättigungswahrscheinlichkeiten findet man bei Encarnación (1965) und Nachtkamp (1969).

drigeres Ziel und dann womöglich noch tiefer stehende Ziele in Betracht kommen. Diese Ziele brauchen durchaus nicht ausschließlich pekuniärer Natur zu sein, doch da wir vereinbart haben, uns auf die Ordnung von Vermögensverteilungen zu beschränken, interessiert hier insbesondere ein Vorschlag von NACHTKAMP (1969, S. 120), nach dem man von mehreren kritischen Vermögensgrenzen, die mit unterschiedlicher Intensität angestrebt werden, ausgehen könnte.

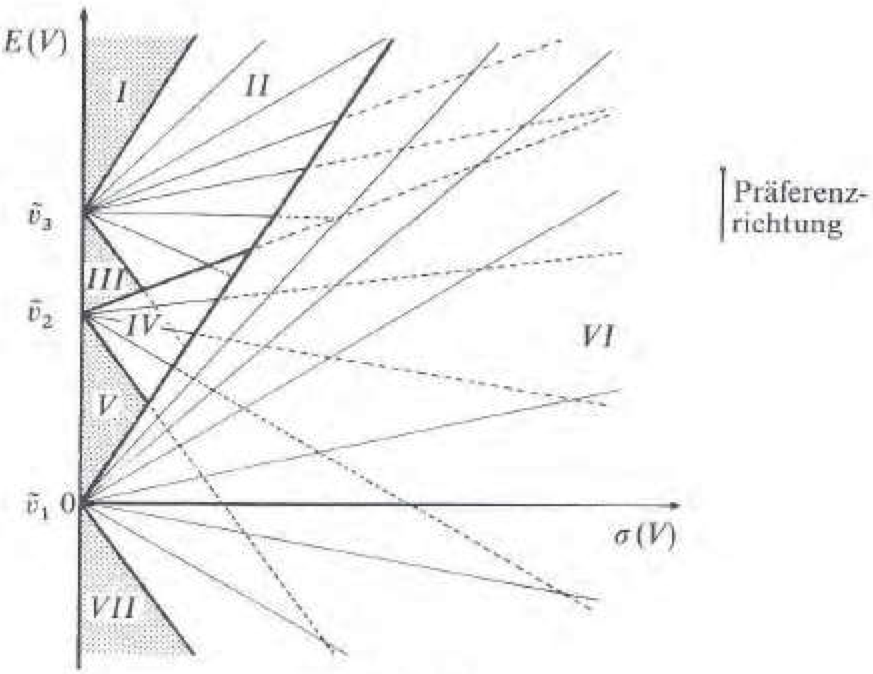


Abbildung 9

Für eine lineare Klasse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und drei kritische Vermögensgrenzen $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$ und $\tilde{v}_3$ läßt sich die Präferenzstruktur leicht an Hand der Abb. 9 veranschaulichen. Für jede der kritischen Vermögensgrenzen wurde ein Pseudo-Indifferenzkurvenbündel nach Art der Abb. 6 eingezeichnet. Die parallel verlaufenden unteren Begrenzungen der Strahlenbündel haben ihre alte Bedeutung (vgl. (7)) behalten: Wegen der oberen Beschränkung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist unterhalb dieser Begrenzungen die Überschreitungswahrscheinlichkeit $= 0$. (Bei oben unbeschränkten Verteilungen fallen die Grenzen mit der Ordinate zusammen.) Dagegen haben die oberen Begrenzungen eine neue Bedeutung gewonnen. Sie geben den geometrischen Ort aller Projekte an, die gerade mit der Sättigungswahrscheinlichkeit für eine Überschreitung der zugehörigen kritischen Vermögensgrenze sorgen. Oberhalb dieser Begrenzungen wird die Sättigungswahrscheinlichkeit übertroffen. Es gilt also

$$(9) \qquad W(v \geq \tilde{v}_i) \{\geqq\} W^*(v \geq \tilde{v}_i) \Leftrightarrow E(V) \{\geqq\} \tilde{v}_i + \underline{k}_i^* \sigma(V), \qquad i = 1, 2, 3,$$

wenn $-\underline{k}_i^*$ die Ausprägung der standardisierten Verteilung Z bezeichnet, bei der

$$(10) \qquad \int_{-\underline{k}_i^*}^{\infty} f_z(z; 0, 1)\, dz = W^*(v \geq \tilde{v}_i).$$

Da plausiblerweise angenommen wurde, daß die Höhe einer Vermögensgrenze in umgekehrter Relation zu ihrer Rangstufe steht, ergeben sich die mit römischen Ziffern benannten Felder der Abb. 9. Aus einem vorgegebenen Möglichkeitsbereich kann man daraufhin leicht das beste Projekt herausfinden: Es muß zunächst die Schnittmenge mit dem Feld bestimmt werden, das die niedrigste Rangziffer aufweist, und dann muß aus dieser Schnittmenge der auf der höchsten Pseudo-Indifferenzlinie liegende Punkt gesucht werden. Sollte die Grenze des Möglichkeitsbereichs mit einer Pseudo-Indifferenzlinie teilweise zusammenfallen, dann sind die gestrichelten Pseudo-Indifferenzlinien zur Auswahl des besten Projekts zu Rate zu ziehen. Wenn auf die beschriebene Weise eine Schnittmenge mit einem ungerade bezifferten Feld gefunden wird, bleibt die Wahlentscheidung teilweise indeterminiert, denn alle Projekte dieser Schnittmenge befriedigen das ranghöhere Ziel mit mehr als nur der Sättigungswahrscheinlichkeit, lassen das rangniedrigere Ziel aber mit Sicherheit noch unerfüllt.

Mit der Einführung der Sättigungswahrscheinlichkeiten hat die lexikographische Präferenzordnung eine ungemeine Flexibilität erhalten, so daß eine Vielzahl von Wahlentscheidungen bei einem vorgegebenen Möglichkeitsbereich durch geeignete Festlegung von kritischen Grenzen und Sättigungswahrscheinlichkeiten beschrieben werden kann[12].

Dennoch muß man die Plausibilitätsfrage stellen: Wieso soll es eigentlich Sättigungswahrscheinlichkeiten geben? Mit der Sättigung bei vollem Bauche haben sie doch wenig zu tun! Eine denkbare, doch nicht befriedigende Antwort besteht in dem Verweis auf Reizschwellen: Ein Ziel, das nahezu mit der Wahrscheinlichkeit 1 erreicht wird, sehen die Menschen als praktisch sicher an und beachten es bei ihrem Kalkül nicht mehr. Doch warum sollte es Reizschwellen nur in der Nähe von 1 geben? Genauso plausibel wäre es doch zu sagen, daß eine Wahrscheinlichkeit nahe bei 0,7 als praktisch 0,7

[12] Flexibilität ist allerdings kein Wert an sich. Siehe dazu STIGLERS Ansatz für eine "Theorie of Economic Theories" in seinem Übersichtsartikel (1950, S. 114–119, bes. S. 115).

und eine andere nahe bei 0,1 als praktisch 0,1 angesehen wird[13]. Für das spezielle Konzept der Sättigungswahrscheinlichkeit können Reizschwellen also nicht herhalten[14].

Aber selbst wenn Sättigungswahrscheinlichkeiten aus anderen Gründen eine Rolle spielen, behält die lexikographische Ordnung das Grundcharakteristikum einer fehlenden Substitutionalität zwischen den Zielen, an dessen Beurteilung sich die Geister scheiden: Warum bleiben rangniedrigere Ziele *völlig* unbeachtet, wenn das ranghöhere Ziel noch nicht mit befriedigender Wahrscheinlichkeit erreicht wird?

Ein Argument hierfür ist nicht von der Hand zu weisen: Es besteht in der Operationalität einer lexikographischen Ordnung[15]. Selbst in der modifizierten Version mit Sättigungswahrscheinlichkeiten ist das praktische Auffinden einer optimalen Entscheidung bei einer lexikographischen Präferenzordnung vermutlich leichter als bei einer substitutionalen. Aus diesem Grund sind wohl die delegierten Präferenzordnungen, mit denen in Verwaltungshierarchien gearbeitet werden muß, lexikographischer Natur. Man braucht hier ja nur an die im staatlichen Verwaltungsapparat offenbar unerläßliche „Paragraphenreiterei" zu denken. Es gibt aber Gründe für den Verdacht, daß in der Praxis beobachtbare lexikographische Ordnungen nur vereinfachte Modelle der in Wahrheit zugrunde liegenden substitutionalen Ordnung sein sollen[16]. Irgendwo werden die Paragraphen ja geschrieben, und dort lohnt sich die Mühe, eine substitutionale Präferenzordnung zu Rate zu ziehen, vielleicht doch. Der Verdacht wird auch dadurch gestützt, daß das vereinfachte lexikographische Präferenzmodell in der Praxis offen-

[13] Vgl. dazu KRELLES (1961, S. 611) Versuch einer Quantifizierung von verbalen Wahrscheinlichkeitsurteilen.

[14] Die Nutzlosigkeit, Reizschwellen in die präferenztheoretische Analyse einzuführen, zeigt sich mit aller Klarheit, wenn man beobachtet, wie SCHNEEWEISS (1967b) und GEORGESCU-ROEGEN (1954, S. 522), die zur Frage der Substitutionalität gegensätzliche Auffassungen haben, die Reizschwellen sozusagen einander „in die Schuhe schieben". Schneeweiß erklärt die Existenz einer lexikographischen Rangfolge zwischen zwei Zielen damit, daß es beim rangniedrigeren Ziel eine Reizschwelle gibt, die eine Veränderung des Zielerreichungsgrades verdeckt. Warum es nicht auch für das andere Ziel eine Reizschwelle gibt, wird nicht gesagt. Ein inhaltlich genau gleiches Argument führt Georgescu-Roegen für die Substitutionalität an. Die Substitutionalität zeige sich nämlich darin, daß man sich nicht benachteiligt fühlt, wenn der Zielerreichungsgrad bei dem Ziel ohne Reizschwelle erhöht, bei dem anderen mit Reizschwelle jedoch verringert werde. Auch hier fehlt eine Begründung für die Annahme nur einer Reizschwelle.

[15] Vgl. CHIPMAN (1960, S. 222), HAUSSMANN (1968/69, S. 33) und NACHTKAMP (1969, S. 325f.).

[16] Das schließt nicht aus, daß auch die üblicherweise verwendeten Präferenzordnungen mit der Möglichkeit *kontinuierlicher* Zielsubstitutionen ihrerseits Approximationen an eine in Wahrheit *diskret* gestaltete Ordnung sind, wie es ja wegen des Phänomens der Reizschwellen zu vermuten ist. Vgl. aber NACHTKAMP (1969, S. 325).

bar nur in engen Entscheidungsbereichen als eine gute Approximation angesehen wird. Wozu sonst das Institut der Kompetenzbeschränkung in Verwaltungshierarchien? Sobald eine Entscheidung den Kompetenzrahmen einer Dienststelle zu überschreiten droht, wird sie in der Hierarchie hochgereicht, bis nach einer detaillierteren (sprich: substitutionaleren) Präferenzordnung entschieden werden kann.

Jedermann kann an sich selbst beobachten, daß es nicht nur in Verwaltungshierarchien nutzbringend ist, mit einem vereinfachten Abbild der wahren Präferenzordnung zu arbeiten. Wo käme man hin, wollte man alle Tagesentscheidungen bis in ihre letzte Konsequenz durchdenken? Möglicherweise, aber sicher nicht zwangsläufig, ist daher die vereinfachte Präferenzordnung, an Hand derer wir täglich entscheiden, lexikographisch. Doch auch hier taugt die vereinfachte Ordnung nicht für Entscheidungen, die das Alltägliche überschreiten. Mitunter grübeln wir eben doch recht lange über der richtigen Entscheidung.

So hat es den Anschein, daß man gut damit tut, sich bei der theoretischen Analyse folgenträchtiger wirtschaftlicher Entscheidungen nicht mit der lexikographischen Tagespräferenz, sondern der zugrundeliegenden substitutionalen Präferenzordnung zu befassen.

Abschnitt C
Das Erwartungsnutzenkriterium

Schon vor zweieinhalb Jahrhunderten wurde durch G. Cramer[1] (1728) und D. Bernoulli (1738) der Grundstein des seit der axiomatischen Fundierung durch von Neumann und Morgenstern (1947, S. 17–29, 617–632) wohl populärsten Ansatzes für die Bildung eines Präferenzfunktionals gelegt. Dieser Ansatz besteht darin, zunächst mit Hilfe einer geeignet gewählten monoton wachsenden Indexfunktion $U(.)$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung über Endvermögenswerte in eine solche über Indexwerte umzuwandeln und dann den Erwartungswert dieser Indexverteilung zum Präferenzfunktional zu wählen:

$$(1) \qquad R(V) = E[U(V)].$$

Wenn, wie es das eingangs formulierte Ordnungsaxiom[2] verlangt, $R(V)$ bis auf eine streng monoton wachsende Transformation bestimmt sein soll,

[1] Schweizer Mathematiker (1704–1752). G. Cramer formulierte seine Gedanken in einem 1728 an Nikolaus Bernoulli, einen Onkel des Daniel Bernoulli, gerichteten Brief. Von dort gelangten sie zu D. B., der sie in seinem Beitrag abdrucken ließ.

[2] Vgl. S. 6.

dann liegt $U(.)$ bis auf eine positive Lineartransformation fest, das heißt, $U(.)$ wird über eine Intervallskala gemessen[3]. Es gilt nämlich für zwei Zufallsvariablen V und V'

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad & E[a+b\,U(V)]\,\{\gtreqless\}\,E[a+b\,U(V')] \\
& \Leftrightarrow E[U(V)]\,\{\gtreqless\}\,E[U(V')],\; b>0,
\end{aligned}
$$

während eine ähnliche Operation für beliebige monotone Transformationen nicht möglich ist[4].

1. *Der Ansatz von G. Cramer und D. Bernoulli*

1.1. *Die Grundidee*

Das *Erwartungsnutzenkriterium* hat viel formale Ähnlichkeit mit dem Mittelwertkriterium $R(V)=E(V)$. In der Tat haben Cramer und Bernoulli es in der Auseinandersetzung mit diesem Kriterium entwickelt. Sie finden es im Prinzip richtig, das Präferenzfunktional als Erwartungswert einer Wertgröße zu formulieren, nur solle es ein subjektiver Wert, nämlich der Nutzen eines Geldbetrages, und nicht dessen objektiver Wert sein, der Verwendung findet[5]. Nach ihrer Auffassung ist also $U(.)$ eine kardinale Nutzenfunktion für sichere Vermögenswerte. Als spezielle Form schlägt BERNOULLI (S. 35) $U(v)=\ln v$ vor, und CRAMER (S. 58–60) setzt alternativ $U(v)=U(a+y)=\sqrt{y}$ und $U(v)=\min(y, y^*)$, wobei y^* ein Sättigungseinkommen bezeichnet. Alle drei Funktionen sind (von unten) konkav, die beiden ersten sogar strikt ($U''(v)<0$), und weisen so die plausible Eigenschaft des abnehmenden Grenznutzens auf, die später durch das *erste Gossensche Gesetz* populär wurde.

Der Konkavität kommt eine ganz besondere Bedeutung für die Risikobewertung zu[6]. Bekanntlich definiert man die Begriffe „Konkavität", „Konvexität" und „Linearität einer Funktion" dadurch, daß man den Funktions-

---

[3] Auf der Intervallskala lassen sich gleiche Nutzenschritte abstecken, doch macht es keinen Sinn, zwei Nutzengrößen zueinander ins Verhältnis zu setzen, wie es bei der Verhältnisskala möglich ist, die bis auf die Multiplikation mit einem positiven Faktor bestimmt ist.

[4] Die zweite Zeile folgt hier aus der ersten, nachdem a und b vor die Erwartungsoperatoren gezogen und durch Subtraktion und Division beseitigt wurden.

[5] D. BERNOULLI (1738, S. 25f.); G. CRAMER (1728, S. 56f.). LAPLACE (1814, S. XVI u. 432–445) spricht daher von der *esperance physique* im Gegensatz zur *esperance morale* und ALLAIS (1952, S. 271f.) von der *valeur monetaire* und der *valeur psychologique*.

[6] Daß es für die nun nachzuweisende Risikofurcht nur auf die Konkavität und nicht auf irgendwelche spezielleren Eigenschaften der Nutzenfunktion ankommt, erkannte schon MARSHALL (1920, S. 693, Note IX, (Anhang)).

wert einer beliebigen Linearkombination von Argumenten mit der entsprechenden Linearkombination der Funktionswerte selbst vergleicht. Daher folgt für die Linearkombination, die mit Hilfe des Erwartungsoperators für eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung gebildet wird, der folgende Zusammenhang:

$$\text{(3)} \qquad \left\{\begin{matrix}\text{Konkavität}\\ \text{Linearität}\\ \text{Konvexität}\end{matrix}\right\} \Rightarrow E[U(V)] \left\{\begin{matrix}\leqq\\=\\ \geqq\end{matrix}\right\} U[E(V)].$$

Daraus ist leicht zu erkennen, daß man bei einer konkaven Nutzenfunktion gerne bereit sein sollte, eine Verteilung von Vermögenswerten gegen ein sicheres Vermögen in Höhe ihres Erwartungswertes auszutauschen. Man kann dieses interessante Phänomen noch etwas näher beleuchten, indem man den niedrigsten sicheren Betrag sucht, der im Austausch gegen die Verteilung äußerstenfalls noch akzeptiert würde. Dieses Sicherheitsäquivalent[7], $S(V)$, wird durch

$$U[S(V)] = E[U(V)],$$

nach Anwendung der Umkehrfunktion[8] $U^{-1}(.)$ also durch

$$\text{(4)} \qquad S(V) = U^{-1}\{E[U(V)]\}$$

festgelegt. Wie bereits erwähnt[9], nennen wir die Differenz zwischen dem Erwartungswert und dem Sicherheitsäquivalent den subjektiven Risikopreis:

$$\text{(5)} \qquad \pi(V) \equiv E(V) - S(V).$$

Der subjektive Risikopreis ist also der Abschlag vom Erwartungswert, den man für eine völlige Beseitigung der Streuung gerade noch hinzunehmen bereit ist. Er eignet sich im Einklang mit der Klassifikation an Hand der zweiparametrischen Kriterien[10] gut zur Abgrenzung der Risikoneigungen:

$$\text{(6)} \qquad \pi(V) \left\{\begin{matrix}\geqq\\=\\ \leqq\end{matrix}\right\} 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Risikofurcht}\\ \text{Risikoneutralität}\\ \text{Risikovorliebe}\end{matrix}\right\}.$$

[7] Vgl. S. 54 und SCHNEEWEISS (1967a, S. 42–46).

[8] Diese Operation erfordert, daß $U^{-1}(.)$ an der Stelle $E[U(V)]$ stetig ist.

[9] S. 55.

[10] Vgl. S. 53. Eine völlige Übereinstimmung besteht, wenn $K_1 = E(V)$ oder $K_1 = E(Y)$. Bei Lange, Shackle, Krelle und Schneider kann man nur eine im Prinzip entsprechende Klassifikation vornehmen.

Die Anwendung der Umkehrfunktion auf die Beziehung (3) gestattet schließlich auch die Aussage[11]

$$(7) \qquad \left\{\begin{matrix}\text{Konkavität}\\ \text{Linearität}\\ \text{Konvexität}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \pi(V)\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}0.$$

So gelingt es also, aus der zunächst unabhängig von der Risikobetrachtung plausiblen Annahme eines abnehmenden Grenznutzens die interessante Hypothese abzuleiten, daß die Menschen für die Risikobeseitigung einen Preis $\pi(V)$ zu zahlen bereit sind. Die Hypothese läßt sich leicht mit der Wirklichkeit konfrontieren, was jetzt für drei einfache Beispiele getan werden soll.

1.2. *Beispiele*

Das erste Beispiel lag Bernoulli selbst sehr am Herzen und war für Cramer überhaupt der Anlaß, das Erwartungsnutzenkriterium zu formulieren. Es ist die Bestimmung des maximalen Einsatzes für ein Glücksspiel. Trotz unserer eingangs geäußerten Zweifel an der Vereinbarkeit der Ergänzung zum Ordnungsaxiom mit der Bewertung von Glücksspielen wollen wir dem Beispiel einmal folgen[12].

Beide Mathematiker bemühten sich, das sog. *Petersburger Paradoxon* aufzuklären. Es besteht darin, daß für ein recht sonderlich konstruiertes Glücksspiel zwar eine mathematische Erlöserwartung von unendlich errechnet wurde, jedoch niemand bereit war, sein Vermögen oder auch nur einen beträchtlichen Teil davon für ein solches Spiel einzusetzen. Ob die Lösung von Cramer und Bernoulli der Problemstellung tatsächlich angemessen war, werden wir später im Zusammenhang mit Arrows *Utility-Boundedness-Theorem* diskutieren müssen. Hier wollen wir uns mit der Erkenntnis begnügen, warum überhaupt der maximale Einsatz ($p_{\max}$) kleiner als der erwartete Spielerlös ist.

Der maximale Einsatz wird so bestimmt, daß man sich bei Erhalt der Erlösverteilung X und nach Bezahlung des sicheren Einsatzes genauso gestellt fühlt wie ohne eine Teilnahme am Spiel. Können wegen einer kurzen Spieldauer Zinserträge vernachlässigt werden, erhält man die $p_{\max}$ implizit bestimmende Gleichung

$$(8) \qquad U(a) = E\left[U(a + X - p_{\max})\right],$$

[11] Sie hat die bemerkenswerte Implikation, daß bei linearen Nutzenindexfunktionen das Erwartungs*nutzen*kriterium mit dem einfachen Erwartungs*wert*kriterium zusammenfällt. Vgl. D. Bernoulli (1738, S. 27).

[12] Vgl. S. 11f.

wobei a das Vermögen ohne Spielteilnahme angibt. Hieraus kommt man nach Anwendung der Umkehrfunktion und Subtraktion von $E(a+X-p_{\max})$ zu

$$(9) \qquad a-E(a+X-p_{\max})=-[E(a+X-p_{\max})-S(a+X-p_{\max})],$$

und unter Berücksichtigung der Definition (5) folgt

$$(10) \qquad p_{\max}=E(X)-\pi(a+X-p_{\max}).$$

Da wegen Konkavität der von Cramer und Bernoulli unterstellten Nutzenfunktionen $\pi>0$, zeigt sich, wie behauptet, daß $p_{\max}<E(X)$.

Dieses Ergebnis mag wohl erklären, daß bei manchen absonderlich konstruierten Glücksspielen niemand bereit ist, den Erwartungsgewinn einzusetzen, doch den Normalfall des Glücksspiels beschreibt es nicht. Der ist nämlich ganz im Gegenteil dadurch gekennzeichnet, daß die Spieler mehr als den erwarteten Erlös einzusetzen bereit sind; andernfalls gäbe es ja keine Spielbanken. Ein solches Verhalten kann mit dem formalen Apparat des Erwartungsnutzens in Übereinstimmung gebracht werden, wenn eine konvexe Nutzenfunktion unterstellt, also die Hypothese des abnehmenden Grenznutzens verlassen wird. Doch die wahre Erklärung hat man damit nicht gefunden. Die liegt nämlich einfach in einer besonderen Spielfreude, die von Größen abhängt, die aus der bloßen Information über die Erlösverteilung gar nicht zu ermitteln sind[13].

Für die nächsten beiden Beispiele aus dem Versicherungsbereich scheint die Theorie aber sehr viel besser zu passen. Anders als beim ersten Beispiel muß jetzt allerdings das Problem der Zeit berücksichtigt werden, denn ohne daß Zeit verstreicht, kann kein Schaden eintreten. Wir unterstellen daher, daß zu Periodenbeginn eine Prämie gezahlt wird und alle Schadenszahlungen am Periodenende erfolgen. Das um die erhaltene oder gezahlte Prämie veränderte Anfangsvermögen werde zum sicheren Zinssatz $q-1$ angelegt.

Wir fragen zunächst nach dem Prämienvolumen $p_{\min}$, das ein Versicherungsunternehmen für die Übernahme einer aus ihrem Gesamtbestand an Verträgen resultierenden Schadensverteilung, die durch die Zufallsvariable C gekennzeichnet sei, mindestens benötigt[14]. Verzichtet das Versicherungsunternehmen auf das Geschäft, dann erzielt es den Endkapitalbestand $v=aq$. Wird das Geschäft betrieben, ist der Endkapitalbestand $V=aq+pq-C$, wobei p die Prämienerlöse bezeichnet. Somit bestimmt sich die minimale Prämie durch

[13] Vgl. S. 184ff.

[14] Vgl. BÜHLMANN (1968, S. 268) und HELTEN (1973, S. 208f.).

$$(11) \qquad \mathrm{U}(\mathrm{aq}) = E\left[U(aq + p_{\min}\, q - C)\right],$$

so daß sich analog zu (10)

$$(12) \qquad p_{\min}\, q = E(C) + \pi(aq + p_{\min}\, q - C)$$

errechnen läßt. Die aufgezinste Minimalprämie setzt sich also aus dem Erwartungsschaden und einem, bei einer konkaven Nutzenfunktion positiven, Risikozuschlag zusammen. Das Ergebnis entspricht der wirklichen Kalkulationspraxis.

Wie steht es um den Versicherungsnehmer? Die Frage wurde schon von BERNOULLI (1738, S. 42–44) angegangen[15], doch erst ein Jahrhundert später hat BARROIS (1834, S. 259–282, bes. S. 260f.) die Maximalprämie vom Standpunkt des Versicherten berechnet[16,17]. Ohne Versicherungsabschluß sieht sich der Versicherungsnehmer dem zufallsabhängigen Periodenendvermögen $V = aq - C$ gegenüber, wobei C nun den *individuellen* stochastischen Schadensbetrag kennzeichnet. Mit Versicherungsabschluß wird, wenn p die gezahlte *individuelle* Prämie ist, das Vermögen $aq - pq$ erreicht. Somit lohnt sich der Vertragsabschluß, solange $E\left[U(aq - C)\right] < U(aq - pq)$; die Maximalprämie, $p_{\max}$, wird also durch die Bedingung

$$(13) \qquad E\left[U(aq - C)\right] = U(aq - p_{\max}\, q)$$

festgelegt, woraus sich

$$(14) \qquad p_{\max}\, q = aq - S(aq - C)$$

errechnet. Schreibt man nun

$$(15) \qquad p_{\max}\, q = aq - E(aq - C) + \left[E(aq - C) - S(aq - C)\right],$$

[15] Bernoulli fragt nach dem Vermögen, das man höchstens haben darf, damit sich der Abschluß eines Versicherungsvertrages noch lohnt. Das ist eine sinnvolle Frage, denn wie wir später sehen werden, impliziert $U(v) = \ln v$ eine mit wachsendem Vermögen abnehmende Risikofurcht (vgl. Kap. III A 2.3).

[16] Unabhängig von Barrois ist das Problem in neuerer Zeit wieder von MOSSIN (1968) aufgegriffen worden. Vgl. auch SCHNEEWEISS (1967a, S. 45) und HELTEN (1973, S. 210f.) und unsere Ausführungen im Kapitel V C.

[17] Der auf Bernoullis logarithmischer Funktion aufbauende und in einem zeitlosen Kontext formulierte Ansatz von Barrois wird hier etwas verallgemeinert. Die Ergebnisgleichung (3) bei BARROIS (S. 261) enthält übrigens einen Fehler. Richtig muß sie lauten:

$$A = F + A'S - (F + S)^{A'} F^{(1 - A')}.$$

so erhält man wegen (5)

$$p_{\max}\, q = E(C) + \pi\,(aq - C). \tag{16}$$

Dieses ist die Bestimmungsgleichung für die maximale Bruttoprämie, die das Versicherungsunternehmen seinem Kunden abverlangen kann. Bei einer konkaven Nutzenfunktion darf also die aufgezinste Bruttoprämie den Erwartungsschaden übersteigen. Vom Standpunkt des Versicherungsunternehmens ist das ja auch eine *conditio sine qua non*, denn der Erwartungsschaden des gesamten Versicherungsbestandes ist gleich der Summe der Einzelerwartungen, so wie das gesamte Prämienaufkommen die Summe der Einzelprämien ist.

Den Fall der Versicherungsnachfrage wollen wir uns noch einmal an Hand der Abb. 10 für den einfachen Fall einer binären Schadensverteilung mit

$$C = \begin{pmatrix} w & 1-w \\ \ell & 0 \end{pmatrix},$$

wobei ℓ und 0 die Ausprägungen von C und w die Schadenswahrscheinlichkeit bezeichnet, vor Augen führen[18].

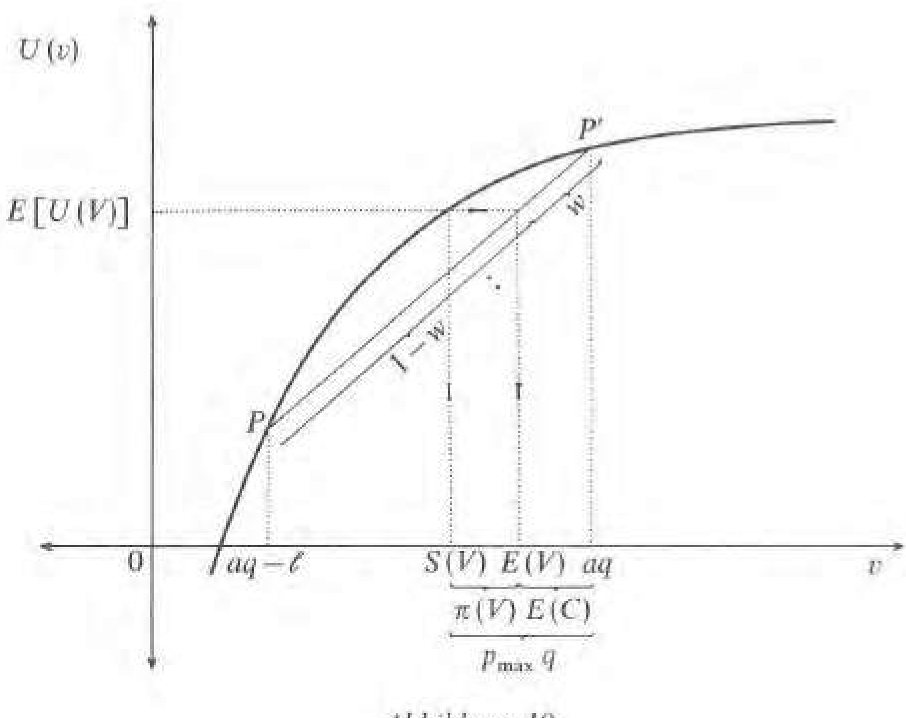


Abbildung 10

[18] Vgl. D. Bernoulli (1738, S. 32) und z. B. noch Schneeweiss (1967a, S. 62).

Da $E(V)$ mit den gleichen Gewichten als Linearkombination aus aq und $aq-\ell$ zu bilden ist, wie $E[U(V)]$ aus $U(aq)$ und $U(aq-\ell)$, liegt der Punkt mit den Koordinaten $(E[U(V)], E(V))$ auf der Sehne $\overline{PP'}$. Um bei gegebenem $E(V)$ den Wert $S(V)$ zu finden, geht man somit bei $E(V)$ von der Abszisse lotrecht auf die Sehne, von dort waagerecht zur Nutzenkurve und dann wieder senkrecht nach unten bis zur Abszisse. Welche Auswirkung eine lineare oder gar konvexe Nutzenkurve auf den subjektiven Risikopreis $\pi(V)$ hätte, kann man sich leicht selbst überlegen.

1.3. *Ein anschauliches Maß der Risikoneigung: Die Intensität der Versicherungsnachfrage*

Barrois' Analyse der Versicherungsnachfrage bildet ein sehr anschauliches Anwendungsbeispiel der Erwartungsnutzentheorie. Aus diesem Grund wollen wir unter Bezugnahme auf dieses Beispiel ein im Verlauf dieser Untersuchung noch mehrfach nützliches standardisiertes Maß der subjektiven Risikoneigung definieren. Wir nennen es die *Intensität der Versicherungsnachfrage*, g. Die Intensität der Versicherungsnachfrage ist die auf den Erwartungsschaden bezogene, aufgezinste maximale Zahlungsbereitschaft des Versicherungsnehmers[19]:

$$g \equiv g(aq-C) = \frac{p_{\max}\, q}{E(C)} = \frac{E(C)+\pi(aq-C)}{E(C)}. \tag{17}$$

Wegen (6) gilt für dieses Maß die Beziehung

$$g \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Risikofurcht} \\ \text{Risikoneutralität} \\ \text{Risikovorliebe} \end{matrix} \right\}. \tag{18}$$

Die Intensität der Versicherungsnachfrage gewinnt aus dem Versicherungsbeispiel eine unmittelbar mit der Empirie konfrontierbare Interpretation. Gesetzt den Fall, ein Versicherungsunternehmen versichere n Personen, die jeweils die gleiche objektive Schadensverteilung C einbringen und die gleiche maximale Zahlungsbereitschaft $p_{\max}$ aufweisen, dann ist die erwartete und bei einem genügend großen Bestand praktisch auch die tatsächliche Schadenssumme $n\,E(C)$ und das maximal erzielbare Prämienvolumen $n\,p_{\max}$. Da man den Quotienten aus der tatsächlichen Schadenssumme und

[19] Dieses Maß ähnelt dem *coefficient of caution* FISHERS (1906, S. 76), der für die Spielsituation den Quotienten aus Spieleinsatz und Erwartungsgewinn bezeichnet. Im Fall der Risikofurcht nimmt der Vorsichtskoeffizient einen Wert <1, bei Risikoneutralität $=1$ und bei Risikovorliebe >1 an.

dem tatsächlichen Prämienaufkommen als Schadensquote bezeichnet, kann der Kehrwert der Intensität der Versicherungsnachfrage

$$\frac{1}{g}=\frac{n\ E(C)}{n\ p_{\max}\ q}$$

als Minimalwert der diskontierten Schadensquote interpretiert werden. Die empirisch ermittelten Schadensquoten[20] liegen in aller Regel sehr deutlich unter 1 und bestätigen damit, was wir mittels der Erwartungsnutzentheorie aus dem Gesetz des abnehmenden Grenznutzens ableiten können.

Mit diesem Ergebnis steht die Theorie Cramers und Bernoullis in glänzendem Lichte da. Dennoch hat sie sich noch (mindestens) zweier Einwände zu erwehren, die im Verlaufe der wissenschaftlichen Diskussion gegen sie vorgebracht wurden. Wir wollen sehen, ob sie damit fertig wird.

1.4. *Das Problem des kardinalen Nutzens*

Es kann bezweifelt werden, daß es eine kardinal meßbare Vermögensnutzenfunktion, wie sie Cramer und Bernoulli fordern, überhaupt gibt. Nach PARETO (1906, S. 169f.) bewegt man sich mit der Annahme der Kardinalität im Bereich der Metaphysik. Sicher sei nämlich nur, daß ein Individuum erstens Klassen gleichwertiger Güterbündel benennen und zweitens diese Klassen in der Reihenfolge ihrer Wünschbarkeit ordnen könne (S. 175–177), also eine ordinale Nutzenfunktion über dem Einkommen oder Vermögen existiere. Diese Sichtweise, die übrigens schon von WUNDT (1863, bes. S. 26) für den Bereich der Psychologie der Reizempfindungen in aller Klarheit vertreten wurde, hat sich vor allem nach der *reconsideration* von HICKS und ALLEN (1930) zur heute dominierenden etabliert.

Das liegt nicht daran, daß es eine zwingende Begründung für die Ordinalität gibt, sondern daran, daß die Theorien, die man auf eine kardinale Präferenzstruktur aufbauen kann, in der Regel auch mit der schwächeren Annahme der Ordinalität betrieben werden können[21,22]. Zwar gibt es

[20] Vgl. z.B. BUNDESAUFSICHTSAMT FÜR DAS VERSICHERUNGSWESEN (1974, S. 96ff. (Anhang)).

[21] Mit Bezug auf die von der Psychophysik vertretene kardinale Nutzen- oder Empfindungsfunktion (vgl. Kap. II) wurde dieser Standpunkt auch von M. WEBER (1908, bes. S. 389–392) eingenommen.

[22] Eine Ausnahme bilden freilich die Wohlfahrtstheorien, deren auf der strengen Kardinalität (auch Einheit und Nullpunkt liegen fest) basierende Empfehlung, alle Einkommen gleich zu machen, um ein Wohlfahrtsmaximum zu erreichen, fallen gelassen werden muß. Den „Faschisten und Kritiker von Sozialismus und Demokratie" (AMOROSO (1938) in einer Biographie über Pareto) dürfte das nicht weiter gestört haben.

Kritiker wie LITTLE (1950, S. 14–52), die sich insbesondere an der Indifferenzannahme stören und daher einen noch allgemeineren Ansatz bevorzugen[23]. Jedoch ist anderen Kritikern wie FRISCH (1932), SCHULTZ (1933), ALT (1936), ALLAIS (1952, S. 271, 273f.), SCHNEEWEISS (1963), KRELLE (1968, S. 10–12) und VAN PRAAG (1968, bes. S. 6–10) der Ansatz wiederum zu allgemein. Sie plädieren allesamt[24] für eine Intervallskala des Nutzens, wie sie von der Erwartungsnutzentheorie benötigt wird. In der Tat wäre ja eine solche eingeschränkt kardinale Funktion durchaus nicht metaphysisch. Wenn Individuen, wie es Pareto annimmt, ihre Indifferenzkurven zeichnen können, dann geben sie Auskunft über das Grenznutzenverhältnis verschiedener Güter. Warum sollten sie nicht ebenfalls in der Lage sein, das Verhältnis der durch zwei sukzessive Vermögenssteigerungen erreichten Nutzenerhöhungen anzugeben[25]? Sind sie es, dann ist die Kardinalität gesichert.

Sie sind es tatsächlich und können sogar noch viel mehr. Das jedenfalls ist das Ergebnis der vielhundertfach in der Psychophysik durchgeführten Versuchsreihen, deren bekannteste die von S.S. Stevens und Mitarbeitern am Harvard Laboratory of Psychophysics sind[26]. Nach diesen Versuchsreihen sind die Menschen ganz allgemein in der Lage, Reize und Empfindungen in einen so engen funktionalen Zusammenhang zu bringen, daß sogar Verhältnisskalen konstruiert werden können.

Wenn dieser Kritikpunkt im übrigen der einzige am Erwartungsnutzenkriterium wäre, dann ließe sich die Kardinalität der Nutzenfunktion aber noch einfacher begründen: Wie es mit der Beziehung (2) geschehen ist, nämlich dadurch, daß Paretos Postulate auf den Vergleich ganzer Wahrscheinlichkeitsverteilungen übertragen werden. So kann also die Kardinalität der Nutzenfunktion kein selbständiger Kritikpunkt sein.

1.5. *Die Berücksichtigung einer spezifischen Risikoneigung*

Die schwache Stelle der Erwartungsnutzentheorie liegt woanders. Selbst wenn es nämlich eine kardinale Nutzenfunktion für sichere Vermögen gibt, so ist immer noch kein zwingender Grund in Sicht, warum ein Risiko allein an Hand dieser Funktion bewertet werden soll. Das zu betonen konnte ALLAIS (1952 u. 1953) nicht satt werden[27]. Wenn auch zwei Menschen die gleiche Nutzenfunktion für sichere Vermögen haben, so heißt das noch lange

---

[23] Vgl. Fn. 5, S. 7.

[24] Alt tut es durch seine Axiomatik zwar faktisch, möchte sich aber nicht zum Protagonisten der Kardinalität stempeln lassen.

[25] Vgl. KRELLE (1961, S. 140).

[26] Eine detaillierte Übersicht findet man bei S.S. STEVENS (1975). Vgl. auch unser Kapitel III A.

[27] Siehe auch SCHNEEWEISS (1967a, S. 70), KRELLE (1968, S. 147) und HELTEN (1973, S. 197).

nicht, daß ihr *plaisir du risque*[28] gleich sein muß. Nach Allais sollte daher die Erwartungsnutzenregel mit Hilfe eines Maßes, das die Nutzenstreuung berücksichtigt, korrigiert werden. Leider wird Allais wenig konkret[29]. Vermutlich kommt KRELLES (1968, S. 148–163) Axiomensystem B, bei dem explizit ein Nutzenstreuungsparameter erscheint, Allais' Vorstellungen recht nahe. Eleganter und inhaltlich kaum unterschiedlich[30] ist aber der Weg, der von Krelle (S. 138–147) mit seinem Axiomensystem A beschritten wird. Dort wird $U(v)$ in eine Risikopräferenzfunktion $\varphi(.)$ und eine Nutzenfunktion für sichere Vermögenswerte $u(.)$ aufgespalten, so daß also

$$U(v) = \varphi[u(v)]. \tag{19}$$

Ähnlich wie oben für $U(.)$ gezeigt, stehen hier Konkavität, Linearität und Konvexität von $\varphi(.)$ für eine Vorliebe für, Gleichgültigkeit gegenüber und Abneigung gegen Nutzenstreuungen. Krelles Ansatz suggeriert zwar immer noch eine gewisse Relevanz der Erwartungsnutzentheorie, weil nämlich das sog. „Normalverhalten", charakterisiert durch eine lineare Risikopräferenzfunktion, wegen der noch verbleibenden Konkavität von $u(.)$ Risikofurcht impliziert; doch solange man keinerlei Hypothesen darüber hat, ob das als „normal" definierte Verhalten auch empirisch normal ist, läuft (19) auf die Aufhebung der Erwartungsnutzentheorie im Sinne Cramers und Bernoullis hinaus. Der zunächst so plausibel erscheinenden Begründung der Risikofurcht durch einen abnehmenden Grenznutzen des Geldes schwindet damit, selbst wenn man die ordinalistische Kritik nicht akzeptiert, der Boden unter den Füßen.

Das ist sehr bedauerlich, zumal bisher keine anderen Begründungen der Risikofurcht bekannt wurden. Auch uns bleibt daher nichts anderes übrig, als die Risikofurcht als beobachtbare Tatsache hinzunehmen und auf eine Erklärung zu verzichten. Was vom Vorschlag Cramers und Bernoullis jetzt noch übrig ist, beschränkt sich auf die Behauptung, daß der Erwartungswert einer wie auch immer gebildeten Indexfunktion $U(.)$ überhaupt als Präferenzfunktional zu verwenden ist. *A priori* ist das gar nicht besonders naheliegend. Eine ähnliche Begründung, wie sie bei den zweiparametrisch-statistischen Kriterien wenigstens für lineare Verteilungsklassen gegeben werden konnte, ist hier nicht möglich. Es gibt aber eine Argumentation, die das im Laufe der Jahrhunderte leicht verstaubte Präferenzfunktional $E[U(V)]$ mit einem Schlag in neuem Lichte erscheinen ließ. Ihr ist ein neuer Unterabschnitt gewidmet.

---

[28] ALLAIS (1952, S. 130f.); im Gegensatz zum *plaisir du jeu*, der reinen Freude an der Ausgestaltung des Spiels.

[29] Nur an einer Stelle ist vom Moment 2. Ordnung die Rede: ALLAIS (1953, S. 513)

[30] Vgl. KRELLE (1968, S. 161–163).

2. *Der von Neumann-Morgenstern-Index*

Von einem ganz anderen Ansatz her als Cramer und Bernoulli kamen von Neumann und Morgenstern (1947) im Rahmen ihrer Spieltheorie ebenfalls zu einer Art Erwartungsnutzen. Der Nutzen, den sie im Auge haben, hat mit dem Nutzen als Maß für die Intensität der Befriedigung kaum noch etwas zu tun. Vielleicht sollte man daher einen anderen Begriff einführen. Es hat sich aber eingebürgert, auch den *von Neumann-Morgenstern-Index* als *Erwartungsnutzen* zu bezeichnen. So wollen auch wir dabei bleiben.

2.1. *Die Axiome*

Das Besondere am von Neumann-Morgenstern-Ansatz besteht darin, daß es gelingt, das Präferenzfunktional $R(V)=E[U(V)]$ aus wenigen Axiomen über rationales Verhalten abzuleiten[31]. Die Präsentation von Axiomen ist immer in gewissem Maße Geschmacksache. So wundert es nicht, daß die ursprünglich von von Neumann und Morgenstern vorgestellten Axiome im Laufe der Zeit nicht unerheblich verändert wurden.

Der entscheidende Schritt wurde bereits zu Beginn der fünfziger Jahre mit dem Unabhängigkeitsaxiom gemacht, dem ja auch bei unserer oben gegebenen Fundierung des *Prinzips des unzureichenden Grundes* eine hervorragende Rolle zukam. Er war immerhin so groß, daß selbst Samuelson (1952a, S. 147) die Verbindung zu den Originalaxiomen nicht mehr verstand: „Quelque mathématicien devrait éclairer tout cela." Der „Mathematiker" fand sich bald. Es war Malinvaud (1952).

Ein einfaches Axiomensystem, das zur Erwartungsnutzenregel führt, erhält man schon, wenn den beiden oben eingeführten Axiomen zwei weitere, nämlich das Archimedes-Axiom und das Nichtsättigungsaxiom hinzugefügt werden[32]. Der Übersichtlichkeit halber führen wir hier das vollständige System an. Dabei gehen die ersten beiden Axiome im Gegensatz zur ursprünglichen Formulierung bereits von der Existenz äquivalenter objektiver Wahrscheinlichkeiten aus. Es wird also dem Ergebnis des ersten Kapitels Rechnung getragen.

(1) Ordnungsaxiom: *Es existiert eine vollständige schwache Ordnung über Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Periodenendvermögen.*

(2) Unabhängigkeitsaxiom: *Es gelte für zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen e_1 und e_2:*

$$e_1 \{\precsim\} e_2 .$$

[31] von Neumann und Morgenstern (1947, S. 26–29, 617–632).

[32] Vgl. S. 6, 11f. und 28. Eine Diskussion verschiedener Axiomensysteme findet man bei Markowitz (1970, S. 228–242) und Krelle (1968, S. 121–195). Unser Axiomensystem ähnelt jenem von Friedman und Savage (1952, S. 464–469).

Dann folgt für Verteilungen, die unter Verwendung einer beliebigen Verteilung e_3 *zusammengesetzt werden,*

$$\begin{pmatrix} w & 1-w \\ e_1 & e_3 \end{pmatrix} \{\precsim\} \begin{pmatrix} w & 1-w \\ e_2 & e_3 \end{pmatrix},$$

wenn $0 < w \leq 1$.

(3) Archimedisches Axiom: *Gegeben seien drei Vermögensausprägungen* $v_1 < v < v_2$. *Dann gibt es genau ein* w, $0 < w < 1$, *so daß*

$$v \sim \begin{pmatrix} w & 1-w \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix}.$$

(4) Axiom der Nichtsättigung: *Wenn* $v_2 > v_1$ *so folgt* $v_2 \succ v_1$.

Auf die bereits bekannten Axiome (1) und (2) gehen wir hier nicht mehr ein. Der wichtigste Aspekt des archimedischen Axioms[33] liegt in dem Ausschluß lexikographisch geordneter Vermögensbereiche, was GEORGESCU-ROEGEN (1954, bes. S. 525) zum Anlaß heftiger Kritik genommen hat. Wenn es z.B. eine lexikographische Vermögensgrenze $\tilde{v}$ gibt, so daß $v_1 < \tilde{v} < v_2$, dann ist für jede Wahrscheinlichkeit im Bereich $0 < w < 1$

$$v \{\gtrsim\} \begin{pmatrix} w & 1-w \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v \{\gtrless\} \tilde{v}. \tag{20}$$

Es gibt also keine von 0 und 1 verschiedene Wahrscheinlichkeit, die Indifferenz erzeugt, wie es das archimedische Axiom verlangt. Wegen unserer oben zu den lexikographischen Kriterien geäußerten Bedenken sollte man dieser Kritik aber für wohlüberlegte Entscheidungen kein Gewicht beimessen. Das noch verbleibende Axiom der Nichtsättigung ist, jedenfalls für die Vermögen der wirklichen Welt, eine Selbstverständlichkeit. Sollte es nicht erfüllt sein, müßten wir beobachten, daß es den Menschen nichts ausmacht, beraubt zu werden.

---

[33] Meistens wird vom „Stetigkeitsaxiom" gesprochen, ein Name, der von MARSCHAK (1950, S. 117) eingeführt wurde. Faßt man die eine Indifferenz erzeugende Wahrscheinlichkeit w als eine Funktion $h(v)$ auf, so suggeriert diese Bezeichnungsweise, daß $h(v)$ stetig sein müsse. Das ist aber unnötig. Z.B. ist die Funktion

$$h(v) = \begin{cases} 0{,}1, & \text{wenn } v < v^* \\ 0{,}5, & \text{wenn } v = v^* \\ 0{,}9, & \text{wenn } v > v^* \end{cases}$$

nicht stetig, obwohl sie einem jeden v wie gefordert ein eindeutiges $h(\,)$ zuordnet.

2.2. Die Herleitung der Erwartungsnutzenregel aus den Axiomen

Es soll nun gezeigt werden, daß die genannten vier Axiome die Erwartungsnutzenregel implizieren.

1. Schritt: Erfragung der Indifferenzwahrscheinlichkeit

Wir stecken zunächst zwei Vermögensgrenzen v_{min} und v_{max} ab, die so großzügig bemessen sind, daß alle zu bewertenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen in dem durch sie abgegrenzten (offenen) Intervall liegen. Dann wird unter Verwendung des Archimedes-Axioms für alle v in diesem Intervall nach der Indifferenzwahrscheinlichkeit $h(v)$ gefragt, die analog zur Formulierung des Axioms implizit durch

$$(21) \qquad v \sim \begin{pmatrix} h(v) & 1-h(v) \\ v_{max} & v_{min} \end{pmatrix}$$

oder, anders gesagt, durch

$$(22) \qquad \begin{pmatrix} h(v) & 1-h(v) \\ v & v \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} h(v) & 1-h(v) \\ v_{max} & v_{min} \end{pmatrix}$$

definiert wird. Die Abb. 11 zeigt einen beispielhaften Verlauf der Funktion $h(v)$. Bemerkenswert ist dabei die Beziehung

$$(23) \qquad v = \begin{Bmatrix} v_{max} \\ v_{min} \end{Bmatrix} \Rightarrow h(v) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} .$$

Sie rührt daher, daß nach Axiom (4) gilt, daß

$$v_{max} > v_{min} \Rightarrow v_{max} \succ v_{min}$$

und daß wegen Axiom (2) die rechte Seite von (22) im Fall $v = v_{max}$ und $h(v) < 1$ schlechter und im Fall $v = v_{min}$ und $h(v) > 0$ besser als die linke wäre. Ob die Funktion $h(v)$ monoton steigt, bleibe derweil noch dahingestellt.

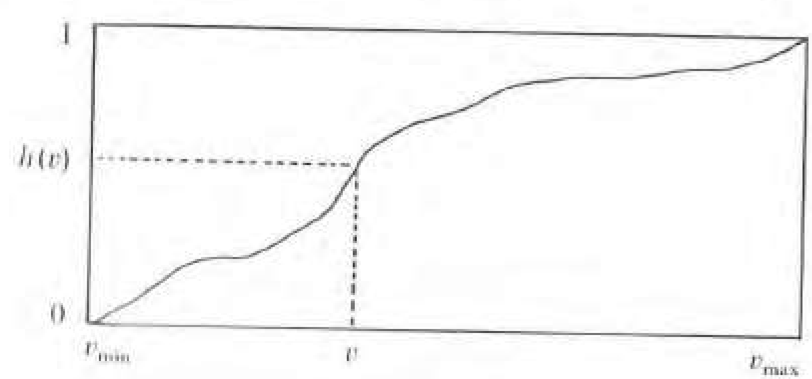


Abbildung 11

2. Schritt: Chancentransformation

Wir nehmen uns eine der zu bewertenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$$(24)\qquad \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \dots w_n \\ v_1 & v_2 \dots v_n \end{pmatrix}$$

vor und schreiben sie, um auf die Formulierung des Unabhängigkeitsaxioms zu kommen, als

$$(25)\qquad \begin{bmatrix} w & 1-w \\ & \\ e_1 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & 1-w_1 \\ & \begin{pmatrix} \dfrac{w_2}{1-w_1} & \dots & \dfrac{w_n}{1-w_1} \\ v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \\ v_1 & \end{bmatrix}.$$

Sodann wird die (auf einen Punkt konzentrierte) Sub*verteilung* $e_1 = v_1$, wie es das Unabhängigkeitsaxiom erlaubt, durch die gemäß der Argumentation unter Schritt 1 äquivalente Zwei-Punkt-Verteilung

$$(26)\qquad e_2 \equiv \begin{pmatrix} h(v_1) & 1-h(v_1) \\ v_{\max} & v_{\min} \end{pmatrix}$$

ersetzt. Damit erhält unsere Wahrscheinlichkeitsverteilung (24) die Gestalt

$$(27)\qquad \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \dots w_n \\ \begin{pmatrix} h(v_1) & 1-h(v_1) \\ v_{\max} & v_{\min} \end{pmatrix} & v_2 \dots v_n \end{bmatrix}.$$

Unter Beibehaltung dieser Transformation werden nun nacheinander in völlig analoger Weise $v_2, v_3, \dots, v_n$ durch äquivalente Zwei-Punkt- Verteilungen ersetzt, so daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung schließlich die Form

$$(28)\qquad \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_n \\ \begin{pmatrix} h(v_1) & 1-h(v_1) \\ v_{\max} & v_{\min} \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} h(v_n) & 1-h(v_n) \\ v_{\max} & v_{\min} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} w_j\, h(v_j) & \sum_{j=1}^{n} w_j [1-h(v_j)] \\ v_{\max} & v_{\min} \end{bmatrix}$$

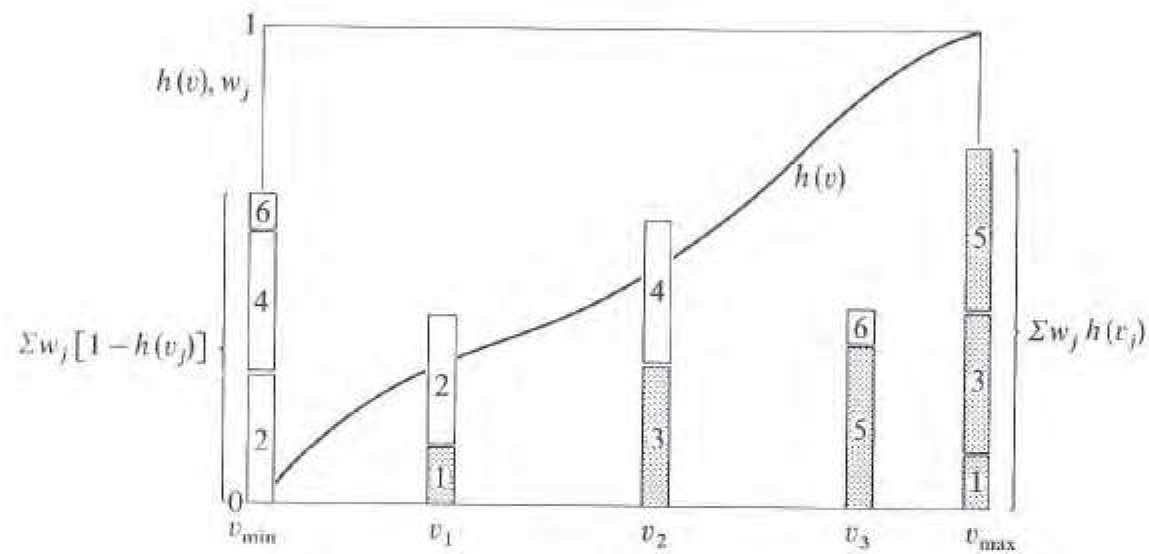
annimmt.

Das Vorgehen läßt sich graphisch leicht veranschaulichen, wenn die Ausgangswahrscheinlichkeitsverteilung in das Diagramm der Abb. 11 eingetragen wird. Für eine Drei-Punkt-Verteilung kommt man dann z.B. zur Abb. 12. Dort repräsentieren die Säulen über v_1, v_2 und v_3 die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2 und w_3. Sie werden je in der Proportion aufgeteilt, wie es die Kurve $h(v)$ an der gleichen Stelle mit dem Abstand zwischen unterer und oberer Bildbegrenzung tut. Nun wird nacheinander für alle Säulen das untere Teilstück dem Vermögen $v_{\max}$ und das obere Teilstück dem Vermögen $v_{\min}$ zugeordnet. Dadurch wird die Verteilung schrittweise zu den Extremwerten verlagert, ohne ihren Wert zu verändern. Durch Aufeinandersetzen der zu den Extremwerten verlagerten Säulenstükke entsteht dann aus der Ursprungsverteilung eine äquivalente Verteilung, die durch die beiden Säulen über den Extremwerten dargestellt wird.

In der beschriebenen Weise kann man nun alle zu bewertenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Zwei-Punkt-Verteilungen mit den Ausprägungen $v_{\min}$ und $v_{\max}$ verwandeln. Es liegt nahe, jene Verteilung, bei der die Wahrscheinlichkeit

$$\sum_{j=1}^{n} w_j h(v_j)$$

für das Auftreten der Ausprägung $v_{\max}$ am größten ist, für die beste zu halten. Bewiesen ist die Richtigkeit dieser Vermutung aber noch nicht.



1 $h(v_1)w_1$ 3 $h(v_2)w_2$ 5 $h(v_3)w_3$
2 $[1-h(v_1)]w_1$ 4 $[1-h(v_2)]w_2$ 6 $[1-h(v_3)]w_3$

Abbildung 12

3. Schritt: Der Vergleich von Zwei-Punkt-Verteilungen

Gesetzt den Fall, es seien zwei Verteilungen

$$(29)\qquad e \equiv \begin{pmatrix} w & 1-w \\ v_{\max} & v_{\min} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e' \equiv \begin{pmatrix} w' & 1-w' \\ v_{\max} & v_{\min} \end{pmatrix},$$
$$\text{wobei} \quad w' > w,$$

zu vergleichen. Dann definieren wir die Wahrscheinlichkeit

$$(30)\qquad w'' \equiv \frac{w'-w}{1-w}$$

und schreiben mit ihrer Hilfe die beiden Verteilungen als

$$(31)\qquad e = \begin{bmatrix} w'' & 1-w'' \\ \begin{pmatrix} w & 1-w \\ v_{\max} & v_{\min} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} w & 1-w \\ v_{\max} & v_{\min} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$
und
$$e' = \begin{bmatrix} w'' & 1-w'' \\ v_{\max} & \begin{pmatrix} w & 1-w \\ v_{\max} & v_{\min} \end{pmatrix} \end{bmatrix}.$$

Unter unmittelbarer Anwendung des Unabhängigkeitsaxioms kommen wir daraufhin nämlich zu den folgenden Beziehungen:

$$(32)\qquad \begin{aligned} e \left\{\begin{smallmatrix} \succ \\ \sim \\ \prec \end{smallmatrix}\right\} e' &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} w & 1-w \\ v_{\max} & v_{\min} \end{pmatrix} \left\{\begin{smallmatrix} \succ \\ \sim \\ \prec \end{smallmatrix}\right\} v_{\max} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} w & 1-w \\ v_{\max} & v_{\min} \end{pmatrix} \left\{\begin{smallmatrix} \succ \\ \sim \\ \prec \end{smallmatrix}\right\} \begin{pmatrix} w & 1-w \\ v_{\max} & v_{\max} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \qquad v_{\min} \left\{\begin{smallmatrix} \succ \\ \sim \\ \prec \end{smallmatrix}\right\} v_{\max}. \end{aligned}$$

Hiernach wird e' genau dann für besser als e gehalten, wenn ein sicheres Vermögen $v_{\max}$ einem kleineren, ebenfalls sicheren Vermögen $v_{\min}$ vorgezogen wird. Nach dem Axiom der Nichtsättigung ist das der Fall.

4. Ergebnis

Damit ist gezeigt, daß von zwei Verteilungen genau jene, für die

$$(33)\qquad \sum_{j=1}^{n} w_j h(v_j)$$

den größeren Wert annimmt, die bessere ist. Das Präferenzfunktional lautet also $R(V)=E[U(V)]$, wobei sich die Indifferenzwahrscheinlichkeitsfunktion $h(v)$ als die Nutzenfunktion $U(v)$ entpuppt.

Das Ergebnis erlaubt nun seinerseits einen Rückschluß auf die anfangs offen gelassene Frage, ob $h(v)=U(v)$ monoton steigt. Die Frage muß bejaht werden, denn gölte für zwei sichere Vermögen v und v', daß $v'>v$ und wegen $U(v')<U(v)$ gleichzeitig $v'\prec v$, dann ergäbe sich ein Widerspruch zum Axiom der Nichtsättigung.

Abschnitt D
Vergleich der Präferenzfunktionale

1. *Erwartungsnutzenansatz versus lexikographische Präferenztheorie: Die Entscheidung für ein Entscheidungskriterium*

Unter den diskutierten Kriterien nimmt das Erwartungsnutzenkriterium dank seiner Herleitung aus einfachen Axiomen eine hervorragende Stellung ein. Man könnte es daher mit SCHNEEWEISS (1967a, S. 78) sogar als ein *quasilogisches Prinzip* bezeichnen. Das klingt sehr euphorisch, zu euphorisch vielleicht, wenn man bedenkt, daß von lexikographischer Seite gefragt wird[1]: "Is it though the greatest of all irrationalities to assume that any given individual, be he a cardinalist, is ex definitione rational in the above sense?"

Die Alternative, die die lexikographische Theorie mit einer Präferenzstruktur der Anspruchsniveaus und Sättigungswahrscheinlichkeiten anbietet, ist indes auch nicht sonderlich überzeugend. Solange diese Präferenzstruktur als eine für kurzfristige Entscheidungen abgeleitete gedacht ist, hat sie sicherlich ihre Berechtigung, doch als Wegweiser für sorgfältig überlegte folgenträchtige Entscheidungen haben wir sie nicht akzeptieren können. Nicht völlig verschließen kann man sich freilich der einfachsten Version der lexikographischen Theorie, bei der es eine echte Ruingrenze gibt, jenseits derer das absolute Fiasko droht. Eine solche Grenze, die wie wir sahen, wenn überhaupt irgendwo, so bei $\bar{v}=0$ liegen müßte, hätte natürlich auch für sorgfältig überlegte Entscheidungen ihre Bedeutung.

So droht, da diese Grenze dem archimedischen Axiom widerspricht, ein Wermutstropfen in den süßen Kelch zu fallen, den Schneeweiß uns reichen will. Doch glücklicherweise ziehen ARROW (1951, S. 29) und ROY (1952,

[1] GEORGESCU-ROEGEN (1954, S. 505).

S. 432f.) den Kelch rechtzeitig beiseite: Wenn die Nutzenfunktion die Gestalt (vgl. Abb. 13)

$$(1) \qquad U(v) = \begin{Bmatrix} 1, & v \geq \tilde{v} \\ 0, & v < \tilde{v} \end{Bmatrix},$$

hat, dann ist die Maximierung des Erwartungsnutzens mit der Maximierung der Überlebenswahrscheinlichkeit identisch, denn es gilt in diesem Fall

$$(2) \qquad \begin{aligned} R(V) = E[U(V)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(v) f(v)\, dv \\ &= \int_{\tilde{v}}^{+\infty} f(v)\, dv \\ &= W(v \geq \tilde{v}). \end{aligned}$$

Das erstaunliche Ergebnis ist also, daß das Erwartungsnutzenkriterium mit der Zielsetzung der Maximierung der Überlebenswahrscheinlichkeit kompatibel ist. Das einzige, was noch stört, ist, daß der in (1) beschriebene Nutzenverlauf dem Axiom der Nichtsättigung und dem archimedischen Axiom widerspricht.

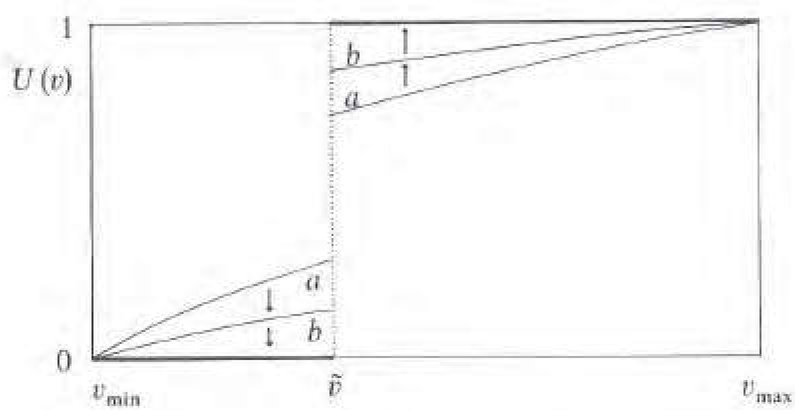


Abbildung 13

Der Widerspruch liegt aber im Grunde auch nur in mathematischen Feinheiten und hat keine wirkliche Bedeutung. Betrachten wir dazu einmal die in Abb. 13 als Graph der Funktion $U(.)$ gedachten Kurven a und b, von denen jeweils die linken Teilstücke für $v < \tilde{v}$ und die rechten für $v \geq \tilde{v}$ zuständig seien. Wegen

$$0 < U(v) < 1 \Leftrightarrow v_{min} < v < v_{max}$$

und der überall strikt positiven Steigung sind diese Kurven mit den genannten Axiomen vereinbar[2]. Das zugehörige Präferenzfunktional schreiben wir als[3]

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad R(V) &= E[U(V)] \\
&= W(v<\tilde{v})\; E[U(V)]\big|_{v<\tilde{v}} + W(v\geq\tilde{v})\; E[U(V)]\big|_{v\geq\tilde{v}}\;.
\end{aligned}
$$

Verschieben wir nun durch eine geeignete Transformation von $U(v)$ die „dünnen" Kurven gegen die „dicken", dann geht $E[U(V)]|_{v<\tilde{v}}\to 0$, weil $U(v)\to 0$ für $v<\tilde{v}$, und es geht $E[U(V)]|_{v\geq\tilde{v}}\to 1$, weil $U(v)\to 1$ für $v\geq\tilde{v}$. Die Folge davon ist

$$
(4) \qquad R(V)\to W(v\geq\tilde{v})\;.
$$

Es läßt sich also die lexikographische Zielsetzung der Maximierung der Überlebenswahrscheinlichkeit durch einen Indexverlauf, der dem archimedischen Axiom und dem Axiom der Nichtsättigung genügt, beliebig genau approximieren.

Diese Überlegungen führen uns zu einem weiteren Kunststück, das der Erwartungsnutzenansatz beherrscht. Kann man durch eine geeignet gewählte Nutzenindexfunktion auch die lexikographische Zielsetzung einer Maximierung der Überlebenswahrscheinlichkeit abbilden, so stellt sich immer noch die Frage, wie zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit gleicher Überlebenswahrscheinlichkeit diskriminiert werden soll. Beim lexikographischen Ansatz wird diese Frage an Hand eines rangniedrigeren Ziels entschieden. Beschränken wir uns auf pekuniäre Ziele, so könnte dieses rangniedrigere Ziel z.B. in der Maximierung des Erwartungsnutzens bei vorgegebener stetiger Nutzenfunktion $\tilde{U}(v)$ bestehen. Auf den ersten Blick scheint der Erwartungsnutzenansatz, wie wir ihn bislang kennengelernt haben, mit einer solchen zweidimensionalen Zielsetzung nicht fertig zu werden, denn auf der Suche nach einem geeigneten Verlauf der Nutzenfunktion $U(v)$ verfällt man zunächst entweder auf $U(v)=\tilde{U}(v)$, dann wird nur das rangniedrigere Ziel erfaßt, oder auf

$$
U(v)=U^*(v)\equiv\begin{Bmatrix}1, & v<\tilde{v}\\ 0, & v\geq\tilde{v}\end{Bmatrix},
$$

womit gemäß (1) nur dem prävalenten Ziel Rechnung getragen wird.

[2] Man beachte Fn. 33, S. 90.

[3] $E(X)|_y$ heißt: „Der Erwartungswert von X unter der Bedingung, daß das Ereignis y eingetreten ist."

Es gibt aber auch die Möglichkeit

$$(5)\qquad U(v)=\begin{Bmatrix} \lambda\tilde{U}(v), & v<\tilde{v} \\ 1-\lambda[1-\tilde{U}(v)], & v\geq\tilde{v}\end{Bmatrix}, \qquad 0<\lambda\leq 1.$$

Wir behaupten, daß sich mit Hilfe dieser Funktion bei $\lambda\to 0$ die zweidimensionale Ordnung mit dem prävalenten Ziel $\max W(v\geq\tilde{v})$ und dem nachgelagerten Ziel $\max E[\tilde{U}(V)]$ beliebig genau approximieren läßt. $\tilde{U}(v)$ liege dabei in normierter Form vor, so daß $\tilde{U}(v_{\min})=0$ und $\tilde{U}(v_{\max})=1$, oder werde durch eine geeignete Lineartransformation in diese Form gebracht.

Was das prävalente Ziel betrifft, wurde diese Behauptung mit (4) bereits belegt, denn $U(v)$ entsteht aus $\tilde{U}(v)$, indem man, bildlich gesprochen, die Nutzenkurve $\tilde{U}(v)$ an der Stelle $v=\tilde{v}$ „auseinanderschneidet" und dann mit $\lambda\to 0$ den linken Teil gegen die Abszisse schiebt und den rechten gegen eine Parallele zur Abszisse im Abstand 1. Die Gestalt von $\tilde{U}(v)$ ist dabei unwichtig für das Ergebnis.

Gesetzt den Fall, das prävalente Ziel gestatte es nicht, zwischen den zwei Verteilungen V' und V'' zu diskriminieren. Dann müßte die zweitrangige Zielsetzung zum Zuge kommen. Die Funktion $U(v)$ müßte also die Funktion $\tilde{U}(v)$ in der Weise vertreten können, daß unter der Voraussetzung $W(v'\geq\tilde{v})=W(v''\geq\tilde{v})$ die Beziehung

$$(6)\qquad E[U(V')]\{\gtreqless\}E[U(V'')] \Leftrightarrow E[\tilde{U}(V')]\{\gtreqless\}E[\tilde{U}(V'')]$$

entweder für beliebige λ exakt oder aber mindestens für $\lambda\to 0$ approximativ gilt. Ersteres ist der Fall. Das ergibt sich aus der folgenden Kette identischer Umformungen:

$$\begin{aligned}
(7)\qquad & E[U(V')]\{\gtreqless\}E[U(V'')] \\
\Leftrightarrow\quad & W(v'<\tilde{v})\,E[U(V')]\big|_{v'<\tilde{v}}+W(v'\geq\tilde{v})\,E[U(V')]\big|_{v'\geq\tilde{v}} \\
& \{\gtreqless\}\,W(v''<\tilde{v})\,E[U(V'')]\big|_{v''<\tilde{v}}+W(v''\geq\tilde{v})\,E[U(V'')]\big|_{v''\geq\tilde{v}} \\
\Leftrightarrow\quad & W(v'<\tilde{v})\,E[\lambda\tilde{U}(V')]\big|_{v'<\tilde{v}}+W(v'\geq\tilde{v})\,E[1-\lambda[1-\tilde{U}(V')]]\big|_{v'\geq\tilde{v}} \\
& \{\gtreqless\}\,W(v''<\tilde{v})\,E[\lambda\tilde{U}(V'')]\big|_{v''<\tilde{v}}+W(v''\geq\tilde{v})\,E[1-\lambda[1-\tilde{U}(V'')]]\big|_{v''\geq\tilde{v}} \\
\Leftrightarrow\quad & W(v'<\tilde{v})\,E[\tilde{U}(V')]\big|_{v'<\tilde{v}}+W(v'\geq\tilde{v})\,E[\tilde{U}(V')]\big|_{v'\geq\tilde{v}} \\
& \{\gtreqless\}\,W(v''<\tilde{v})\,E[\tilde{U}(V'')]\big|_{v''<\tilde{v}}+W(v''\geq\tilde{v})\,E[\tilde{U}(V'')]\big|_{v''\geq\tilde{v}} \\
\Leftrightarrow\quad & E[\tilde{U}(V')]\{\gtreqless\}E[\tilde{U}(V'')].
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt worden, daß die Funktion (5) geeignet ist, die beschriebene zweidimensionale Zielsetzung beliebig genau zu approximieren[4].

[4] Man könnte die Zielsetzung auch noch verallgemeinern, indem man die Maxi-

Es ist wichtig, sich klar zu machen, daß für $\lambda \to 0$ das prävalente und das nachgelagerte Ziel *gleichzeitig* berücksichtigt werden. Für beliebige $\lambda > 0$, also während des gesamten Grenzübergangs $\lambda \to 0$, liefert die „durchgeschnittene" Nutzenkurve $U(v)$ beim Vergleich der Verteilungen V' und V'' die gleiche Bewertung wie $\tilde{U}(v)$, wenn nur die Überlebenswahrscheinlichkeiten für beide Verteilungen gleich sind. Für $\lambda \to 0$ hat $U(v)$ indes zusätzlich die Eigenschaft, im Falle unterschiedlicher Überlebenswahrscheinlichkeiten die Verteilung mit der höheren Überlebenswahrscheinlichkeit besser zu bewerten, wie auch immer $\tilde{U}(v)$ gestaltet ist.

Vom normativen Standpunkt ist die lexikographische Kritik des archimedischen Axioms die einzige, die bis heute in der Diskussion des von Neumann-Morgenstern-Indexes überlebt hat. Mit den vorangehenden Überlegungen zu seiner Approximationsfähigkeit ist auch diese Kritik weitgehend entkräftet. Wir sollten daher das *Erwartungsnutzenkriterium als Gebot rationalen Handelns* akzeptieren.

Damit könnten wir das Kapitel II eigentlich schon beschließen und mit dem Erwartungsnutzenkriterium weiterarbeiten. Leider gibt es aber noch einen Aspekt, der bislang unberücksichtigt blieb: die Operationalität der Präferenzfunktionale in der theoretischen Analyse. Hier steht das Erwartungsnutzenkriterium so ziemlich an letzter Stelle. Gerade seine große Flexibilität macht die Handhabung schwierig.

Daher ist es naheliegend, die Frage nach der Kompatibilität zwischen dem Erwartungsnutzenkriterium und den zweiparametrisch-substitutionalen Kriterien zu stellen. Vielleicht besteht doch irgendwo eine solche Kongruenz, daß wir bei Bedarf auf ein einfacheres Entscheidungskriterium zurückgreifen können.

2. *Der Erwartungsnutzen und die zweiparametrisch-substitutionalen Kriterien: Auf der Suche nach einer operationalen Alternative*

2.1. *Gemeinsam darstellbare Präferenzstrukturen*

In diesem Abschnitt wird versucht, eine *rigorose* Frage zu beantworten[5]: Gibt es Präferenzstrukturen, die sich sowohl mit Hilfe einer geeignet gewählten Nutzenindexfunktion als auch durch ein passend gewähltes Präferenz-

mierung eines gewogenen Mittels der bedingten Erwartungsnutzen zum zweitrangigen Ziel erklärt:

$$\max \{\alpha E[U(V)]|_{v<\bar{v}} + (1-\alpha) E[U(V)]|_{v \geq \bar{v}}\}.$$

Das soll hier aber nicht in Angriff genommen werden.

[5] Vgl. dazu auch SCHNEEWEISS (1967a, S. 89–117, Kapitel III) und MARKOWITZ (1970, S. 287–294).

funktional gemäß den jeweils zum Vergleich herangezogenen anderen Kriterien exakt darstellen lassen? Kurz: Welches ist die gemeinsame Schnittmenge an Präferenzstrukturen?

Völlig aussichtslos ist die Suche bei den Kriterien von Lange und Shackle, denn sie verschenken ja einen Teil der in einer Wahrscheinlichkeitsverteilung enthaltenen Informationen. So brauchen wir uns von vorneherein nur mit den übrigen Kriterien zu befassen[6].

2.1.1. Das Domar-Musgrave-Kriterium

$$R(V) = U\left[E(Y),\ -\int_{-\infty}^{0} y\, f(y+a)\, dy\right]$$

Das Domar-Musgrave-Kriterium, das als

$$R(V) = U(K_1, K_2) \quad \text{mit} \quad K_1 \equiv W(y \geq 0)\ E(\overset{+}{Y}) - W(y < 0)\ E(\bar{Y})$$
$$\text{und} \quad K_2 = W(y < 0)\ E(\bar{Y})$$

geschrieben werden kann, impliziert, wie es von RICHTER (1959–1960, S. 155–157) gezeigt wurde, eine Nutzenindexkurve, die aus linearen Stücken zusammengesetzt ist:

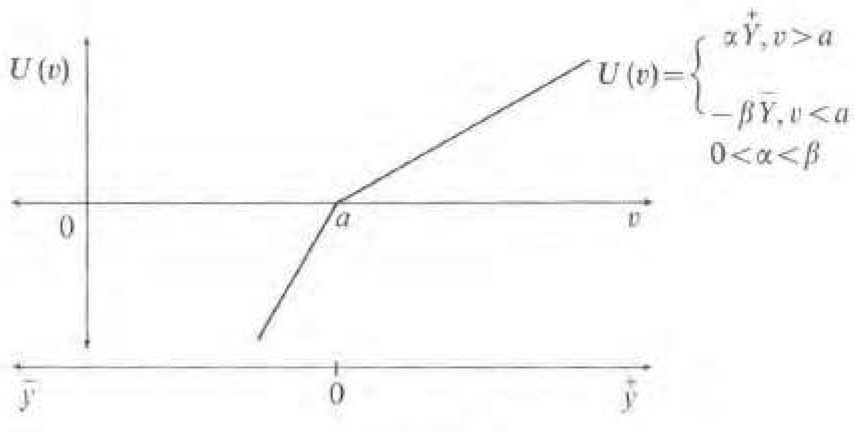


Abbildung 14

Die Ursache liegt darin, daß die Streuungen der Verluste und Gewinne um ihre konstanten Mittelwerte $E(\bar{Y})$ und $E(\overset{+}{Y})$ den Wert des Präferenzfunktionals nicht beeinflussen dürfen, was nur bei linearen Indexverläufen möglich ist. Das Präferenzfunktional kann somit zu

$$\text{(8)} \qquad R(V) = E[U(V)] = W(y \geq 0)\ \alpha E(\overset{+}{Y}) - W(y < 0)\ \beta E(\bar{Y})$$
$$= \alpha K_1 - (\beta - \alpha) K_2$$

---

[6] SCHNEEWEISS (1967a, S. 103–111) zeigt, daß Präferenzstrukturen, in die ordinale Parameter definitiv eingehen, nicht mit $R(V) = E[U(V)]$ kompatibel sind.

vereinfacht werden. Als erste Approximation ist der Indexverlauf der Abb. 14 nicht unplausibel. Immerhin sorgt die Konkavität für Risikofurcht. Unschön ist nur die in Abb. 15 dargestellte Implikation linearer Indifferenzkurven im K_1-K_2-Diagramm:

$$\frac{dK_1}{dK_2} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \text{const.} \tag{9}$$

Insbesondere für das Problem der Steuerwirkungsanalyse, für das Domar und Musgrave ihr Präferenzfunktional konstruierten, ist das fatal: Die von ihnen behaupteten Substitutionseffekte unter dem Einfluß von Steuern treten dann nämlich nicht mehr auf.

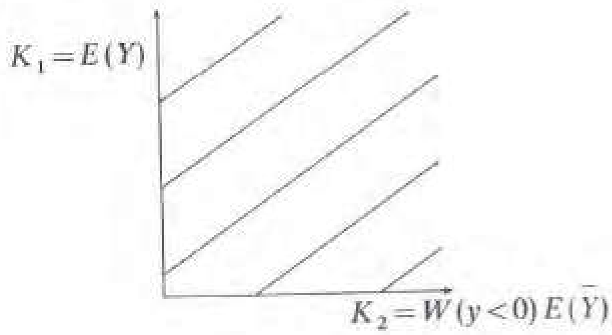


Abbildung 15

2.1.2. Das Kriterium von Krelle und Schneider

$$R(V) = U(\overset{+}{y}{}^*, \overset{-}{y}{}^*)$$

Das Krelle-Schneider-Kriterium ist so allgemein, daß es alle nur denkbaren Präferenzstrukturen umfaßt: Es ist ja der Entscheidungsträger selbst, der die äquivalenten Gewinne und Verluste konstruiert. Bei der Operationalität hat es gegenüber dem Erwartungsnutzenkriterium in seiner allgemeinen Fassung freilich keine Vorteile.

Doch immerhin gelingt es ja Schneider, sein Kriterium durch eine Hilfsannahme für die Steuerwirkungsanalyse brauchbar zu machen. Diese Hilfsannahme ist, daß eine Einkommensteuer ohne Verlustausgleich mit dem Satz t die äquivalenten Nettogewinne auf das $(1-t)$-fache der äquivalenten Bruttogewinne reduziert. Völlig Analoges wird übrigens bei der Reaktion der äquivalenten Verluste auf eine Subvention mit dem Satz z unterstellt. Wir wollen prüfen, ob es Nutzenfunktionen gibt, die mit dieser *operationalisierten Version* des Kriteriums im Einklang stehen.

Zu diesem Zweck bezeichnen wir den Funktionsverlauf über der Gewinnachse mit $\overset{+}{U}(\overset{+}{y})$ und über der Verlustachse mit $\bar{U}(\bar{y})$, so daß also mit y als dem Periodeneinkommen gilt:

$$\text{(10)} \qquad \overset{+}{U}(\overset{+}{y}) \equiv U(y) \quad \text{und} \quad \overset{+}{y} \equiv y, \quad \text{wenn} \quad y \geq 0,$$

und

$$\bar{U}(\bar{y}) \equiv -U(y) \quad \text{und} \quad \bar{y} \equiv -y, \quad \text{wenn} \quad y \leq 0.$$

Dabei unterstellen wir, daß $U(y)$ bei $y=0$ keinen Sprung aufweist, so daß $\overset{+}{U}(0) = \bar{U}(0)$. Wäre dies nicht der Fall, ergäbe ja auch die von Krelle und Schneider benutzte „Nullchance" keinen Sinn. Da die Nutzenfunktion nur bis auf eine Lineartransformation bestimmt zu sein braucht, dürfen wir schließlich auch willkürlich

$$\text{(11)} \qquad \overset{+}{U}(0) = \bar{U}(0) = U(0) = 0$$

setzen.

Nun verfolgen wir die Schneidersche Transformationsprozedur. Für die zu bewertende Ausgangsverteilung gilt nach der Erwartungsnutzenregel

$$\text{(12)} \qquad U(\overset{+}{y}^*, \bar{y}^*) = W(y \geq 0)\; E[\overset{+}{U}(\overset{+}{Y})] - W(y < 0)\; E[\bar{U}(\bar{Y})].$$

Falls $W(y \geq 0) > \overset{+}{w}$, wird mit der Errichtung einer Nullchance hieraus[7]

$$\text{(13)} \qquad U(\overset{+}{y}^*, \bar{y}^*) = \overset{+}{w}\; \overset{+}{U}(\overset{+}{y}^*) + [W(y \geq 0) - \overset{+}{w}]\, U(0) - W(y < 0)\; E[\bar{U}(\bar{Y})]$$

und, nachdem die Überschußwahrscheinlichkeit dem Verlust zugewiesen wurde,

$$\text{(14)} \qquad U(\overset{+}{y}^*, \bar{y}^*) = \overset{+}{w}\; \overset{+}{U}(\overset{+}{y}^*) - \bar{w}\; \bar{U}(\bar{y}^*).$$

Falls hingegen $W(y < 0) > \bar{w}$, so haben wir zunächst

$$\text{(15)} \qquad U(\overset{+}{y}^*, \bar{y}^*) = W(y \geq 0)\; E[\overset{+}{U}(\overset{+}{Y})] + [W(y < 0) - \bar{w}]\, U(0) - \bar{w}\; \bar{U}(\bar{y}^*)$$

[7] Der erste Schritt der Prozedur, nämlich die Gewinn- und Verlustverteilungen durch ihre Sicherheitsäquivalente zu beschreiben, ist in diesem Zusammenhang uninteressant. Für die Definition von $\overset{+}{y}^*$, $\bar{y}^*$, $\overset{+}{w}$ und $\bar{w}$ siehe S. 61.

und danach auch wieder (14). Unter Berücksichtigung von (11) folgt nun wahlweise durch Gleichsetzung von (14) und (15) oder von (12) und (13)

$$(16) \qquad \overset{+}{w}\, \overset{+}{U}(\overset{+}{y}^*) = W(y \geq 0)\;\; E[\overset{+}{U}(\overset{+}{Y})]$$

und somit die Bestimmungsgleichung für die äquivalenten Gewinne:

$$(17) \qquad \overset{+}{y}^* = \overset{+}{U}^{-1}\left\{\frac{1}{\overset{+}{w}} W(y \geq 0)\;\; E[\overset{+}{U}(\overset{+}{Y})]\right\}.$$

Analog wird aus (13) und (14) oder aus (12) und (15)

$$(18) \qquad \bar{y}^* = \bar{U}^{-1}\left\{\frac{1}{\bar{w}} W(y < 0)\;\; E[\bar{U}(\bar{Y})]\right\}.$$

Schneider behauptet nun, daß

$$(19) \qquad (1-t)\,\overset{+}{y}^* = \overset{+}{U}^{-1}\left\{\frac{1}{\overset{+}{w}} W(y \geq 0)\;\; E[\overset{+}{U}((1-t)\,\overset{+}{Y})]\right\},$$

$$(1-z)\,\bar{y}^* = \bar{U}^{-1}\left\{\frac{1}{\bar{w}} W(y < 0)\;\; E[\bar{U}((1-z)\,\bar{Y})]\right\}.$$

Die einzigen Formen, die die Nutzenfunktionen $\overset{+}{U}(\overset{+}{y})$ bzw. $\bar{U}(\bar{y})$ dann noch annehmen können, sind nach einem Theorem von ACZÉL (1966, S. 151–153)[8] (unter Beachtung der Monotonie von $U(v)$ und wegen $\overset{+}{U}(0) = \bar{U}(0) = 0$):

$$(20) \qquad \overset{+}{U}(\overset{+}{y}) = \alpha\, \overset{+}{y}^{\gamma};\;\; \alpha > 0,\; \gamma > 0;$$

$$(21) \qquad \bar{U}(\bar{y}) = \beta\, \bar{y}^{\delta};\;\; \beta > 0,\; \delta > 0.$$

Mit Hilfe dieser Funktionen kann die Gleichung (14) als

$$(22) \qquad U(\overset{+}{y}^*, \bar{y}^*) = \overset{+}{w}\,\alpha\, \overset{+}{y}^{*\gamma} - \bar{w}\,\beta\, \bar{y}^{*\delta}$$

spezifiziert werden, woraus für $E[U(V)] \equiv c = \text{const.}$ sogar die Funktionsform der Indifferenzkurven im $\overset{+}{y}^*$-$\bar{y}^*$-Diagramm explizit errechnet werden kann:

$$(23) \qquad \overset{+}{y}^* = [a + b\;\bar{y}^{*\delta}]^{1/\gamma},\;\; a = \frac{c}{\overset{+}{w}\,\alpha},\;\; b = \frac{\bar{w}\,\beta}{\overset{+}{w}\,\alpha} > 0.$$

[8] Vgl. Kapitel III A 2.1.

Als Beispiel wurde in der Abb. 16 das Indifferenzkurvensystem für $\delta > \gamma = 1$ eingezeichnet.

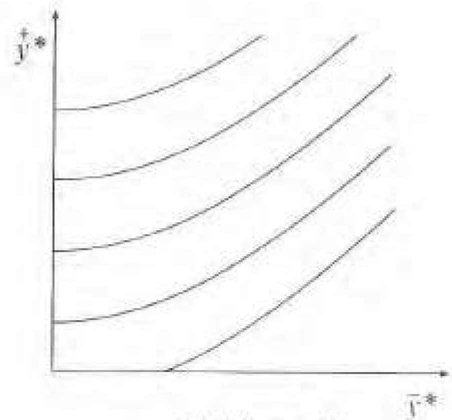


Abbildung 16

Es hat die für Schneiders Steuerwirkungsanalyse unerläßliche und durchaus plausible Eigenschaft konvexer Kurvenverläufe.

Um eine allgemeinere Information zur Frage der Konvexität zu erhalten, errechnet man besser die Krümmung der Indifferenzkurven. Wir beziehen uns dabei unmittelbar auf (22)[9]:

$$(24) \qquad \left.\frac{d^2 \overset{+}{y}^*}{d\bar{y}^{*2}}\right|_{U(\overset{+}{y}^*,\, \bar{y}^*)} = \frac{-U_1^2 U_{22} + 2U_{12} U_1 U_2 - U_2^2 U_{11}}{U_1^3}$$

$$= \frac{-(\overset{+}{w}\alpha\gamma \overset{+}{y}^{*\gamma-1})^2 [-\bar{w}\beta\delta(\delta-1)\bar{y}^{*\delta-2}] - (-\bar{w}\beta\delta\bar{y}^{*\delta-1})^2 [\overset{+}{w}\alpha\gamma(\gamma-1)\overset{+}{y}^{*\gamma-2}]}{[\overset{+}{w}\alpha\gamma \overset{+}{y}^{\gamma-1}]^3}.$$

Da uns nur das Vorzeichen dieses Ausdruckes interessiert, kommen wir zu einigen Vereinfachungen und erhalten die Beziehung

$$(25) \qquad \left.\frac{d^2 \overset{+}{y}^*}{d\bar{y}^{*2}}\right|_{U(\overset{+}{y}^*,\, \bar{y}^*)} \{\gtreqless\} 0 \Leftrightarrow \overset{+}{w}\alpha\gamma(\delta-1)\overset{+}{y}^{*\gamma} - \bar{w}\beta\delta(\gamma-1)\bar{y}^{*\delta} \{\gtreqless\} 0,$$

deren Implikationen die folgende Tabelle zusammenfaßt:

---

[9] Vgl. Fn. 4, S. 54

Die Krümmung der Indifferenzkurven

δ \ γ	<1	$=1$	>1
<1	(1) $\gtreqless 0$	<0	<0
$=1$	(2) >0	$=0$	<0
>1	(3) >0	(4) >0	(5) $\gtreqless 0$

Zulässig sind bei der Forderung konvexer Indifferenzkurven nur die Parameterkonstellationen (1) bis (5), wobei die Fälle (1) und (5) auch nur bedingt verwendbar sind, da sie einen teilweise konvexen und teilweise konkaven Kurvenverlauf im $\overset{+}{y}{}^*$-$\bar{y}^*$-Diagramm mit sich bringen.

Die Implikationen der zulässigen Parameterkonstellationen für die Vermögensnutzenfunktion $U(V)$ werden in den folgenden fünf Abbildungen veranschaulicht:

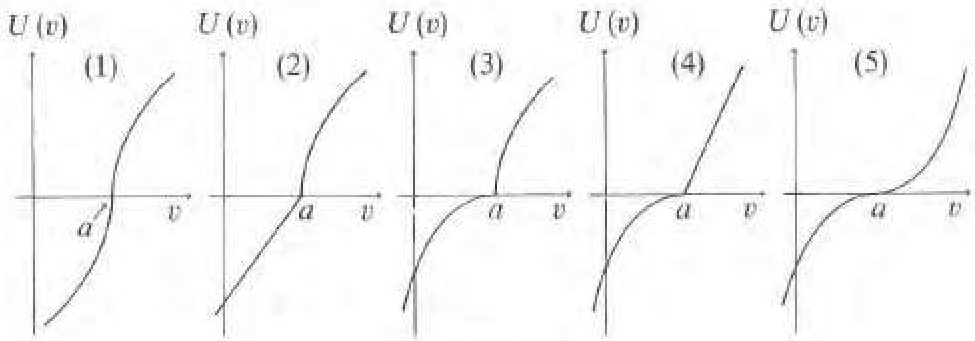


Abbildung 17

Es ist bemerkenswert, daß die Nichtlinearität des Kurvenastes im Bereich $v \geq a$ oder $v \leq a$ (bzw. $y \geq 0$ oder $y \leq 0$) bei $v \rightarrow a$ (bzw. $y \rightarrow 0$) entweder zu einer unendlich großen Steigung der Nutzenkurve oder zu einer Steigung von 0 führt. Diese Eigenart produziert einige unplausible Knicke und sorgt dafür, daß es für *alle* zulässigen Kurvenverläufe konvexe Bereiche gibt, die Risikovorliebe implizieren. Der für manchen plausibelste Verlauf ist der fünfte; er entspricht in etwa dem einer von MARKOWITZ (1952b) vorgeschlagenen Kurve, die für mäßig positive Vermögensänderungen konvex ist, um die Vorliebe von Glücksspielen zu erklären, und für negative Vermögensänderungen konkav, um der Versicherungsnachfrage Rechnung zu tragen. Ganz abgesehen davon, daß wir die Begründung für Glücksspiele nicht akzeptieren können[10], ist die oben gezeichnete Kurve (5) aber auch deshalb nicht akzeptabel, weil sie bei $v=a$ eine Steigung von Null hat, was dem Axiom der Nichtsättigung widerspricht.

2.1.3. Das μ-σ-Kriterium

$$R(V)=U[E(V), \sigma(V)]$$

Das μ-σ-Kriterium läßt sich, wie es RICHTER (1959–1960, S. 153) gezeigt hat[11], mit dem Erwartungsnutzenkriterium in Übereinstimmung bringen, wenn die Nutzenindexfunktion durch ein Polynom zweiten Grades,

$$U(v)=v-\alpha v^2, \tag{26}$$

beschrieben wird[12]. Man hat dann nämlich nach Anwendung des Erwartungsoperators

$$E[U(V)]=E(V)-\alpha E(V^2). \tag{27}$$

Daraus folgt[13] wegen[14] $\sigma^2(V)=E(V^2)-E^2(V)$

$$E[U(V)]=E(V)-\alpha E^2(V)-\alpha \sigma^2(V). \tag{28}$$

Abb. 18 zeigt die zugehörige Nutzenindexkurve, die unplausiblerweise bei $v=1/(2\alpha)$ ein Maximum aufweist[15], und die nicht minder unplausiblen kreisförmigen Indifferenzkurven im μ-σ-Diagramm.

---

[10] Vgl. S. 184ff.

[11] Vgl. auch BORCH (1962, 1968b und 1969).

[12] Diese einfache Form kann durch Lineartransformation z. B. aus

$$U(v)=\alpha_1+\alpha_2 v+\alpha_3 v^2 \quad \text{oder} \quad U(v)=(v-\alpha_1)-\alpha_2(v-\alpha_3)^2$$

entstanden sein.

[13] Ein Beweis dafür, daß dieses Präferenzfunktional tatsächlich das einzige ist, das sich mit dem μ-σ-Kriterium in Übereinstimmung bringen läßt, geben MARKOWITZ (1970, S. 286f.) und SCHNEEWEISS (1967a, S. 113–117). BORCH (1968b) zeigt gar, daß das fragliche Präferenzfunktional das einzige ist, das mit dem Unabhängigkeitsaxiom kompatibel ist.

[14]
$$\begin{aligned}\sigma^2(V)&=E\{[V-E(V)]^2\}\\&=E[V^2-2V E(V)+E^2(V)]\\&=E(V^2)-2E(V)\,E(V)+E^2(V)\\&=E(V^2)-E^2(V)\end{aligned}$$

[15] Aus diesem Grund gelingt es SCHNEEWEISS (1968a), die Unverträglichkeit zwischen dem μ-σ- und dem Dominanzprinzip aufzuzeigen. (Man sagt, daß die Verteilung

Zur Gestalt der Indifferenzkurven kommt man dabei, indem (28) durch α dividiert und mit -1 multipliziert und auf beiden Gleichungsseiten der Summand $[1/(2\alpha)]^2$ hinzugefügt wird:

$$\text{(29)} \qquad \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 - \frac{E[U(V)]}{\alpha} = \sigma^2(V) + \left\{E^2(V) - 2E(V)\frac{1}{2\alpha} + \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2\right\}$$
$$= \sigma^2(V) + \left[\frac{1}{2\alpha} - E(V)\right]^2$$

Da die linke Seite dieses Ausdrucks auf einer Indifferenzkurve konstant ist, folgt nach dem *Satz des Pythagoras*, daß die Indifferenzkurven Kreise um einen Punkt mit den Koordinaten $(\sigma = 0, E(V) = 1/(2\alpha))$ beschreiben[16].

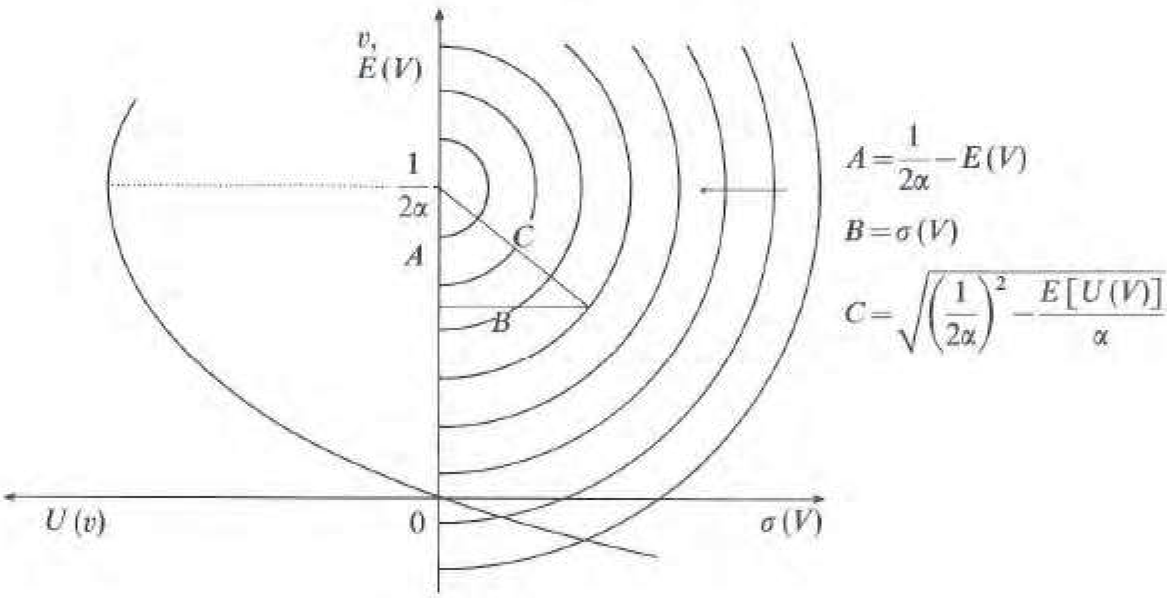


Abbildung 18

Dieses skurrile Abbild einer Präferenzstruktur kann zunächst gar nichts anderes als eine Abschreckung vor dem μ-σ-Kriterium bewirken, denn einen negativen Grenznutzen des Vermögens gibt es ganz bestimmt nicht, da man in diesem Fall beobachten müßte, daß die Menschen ihr Geld fortwerfen. Dennoch läßt sich die Verwendung dieses Kriteriums rechtfertigen, wenn die zu bewertenden Verteilungen so geartet sind, daß keine oder sehr wenig

der Zufallsvariablen V_1 mit der Dichtefunktion $f_1(.)$ jene von V_2 mit der Dichtefunktion $f_2(.)$ dominiert, wenn

$$\int_{-\infty}^{v^*} v\, f_1(v)\, dv \geq \int_{-\infty}^{v^*} v\, f_2(v)\, dv \;\forall v^*, \; -\infty < v^* < +\infty,$$

und bei mindestens einem v^* das Zeichen „>" allein gilt.)

[16] Die Kreisform wurde wohl zuerst von Hicks (1965, S. 115) erkannt.

Dichte auf den Bereich jenseits des Maximums entfällt. In diesem Fall hat man es auch nur mit dem „plausiblen" Bereich der Indifferenzkurven,

wo $\left.\dfrac{dE(V)}{d\sigma(V)}\right|_{E(U)} > 0$ und $\left.\dfrac{d^2E(V)}{d\sigma^2(V)}\right|_{E(U)} > 0$, zu tun.

Leider weisen die Indifferenzkurven aber auch hier eine sehr befremdliche Eigenschaft auf, die in der Abb. 19 veranschaulicht wird: Steht eine gegebene Einkommensverteilung Y zur Bewertung an und erhöht sich das Vermögen des Entscheidungsträgers a, dann steigt der subjektive Risikopreis $\pi(a+Y)$ mit wachsendem Vermögen an[17]. (Um dies zu sehen, muß man in der Abb. 19 bei $\sigma(V)=\sigma(Y)=\text{const.}$ auf einer senkrechten Linie nach oben gehen.) Anders gesagt, steigt die Intensität der Versicherungsnachfrage

$$g(aq-C)=\frac{E(C)+\pi(aq-C)}{E(C)} \qquad \big(\text{mit} \quad Y=a(q-1)-C\big)$$

für ein *gegebenes* Risiko (C), wenn man reicher wird. Alle Erfahrung spricht aber für das Gegenteil.

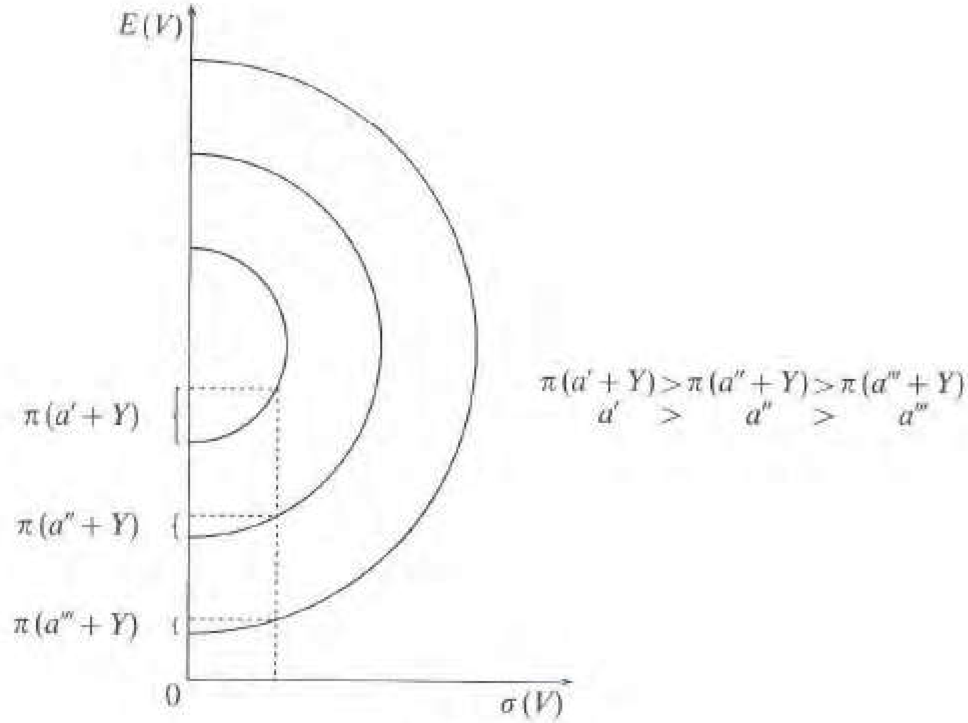


Abbildung 19

[17] Hicks (1962, S. 802) bemerkt dazu lapidar: "That, I submit, is nonsense." Siehe auch Arrow (1965, S. 35f.), der von einer "absurdity of the quadratic assumption" spricht.

2.1.4. Das Mittelwert-Semivarianz-Kriterium

$$R(V) = U\left[E(V),\ \int_{-\infty}^{v^*} (v-v^*)^2 f(v)\, dv\right]$$

Mit einem Präferenzfunktional, das auf dem Erwartungswert und der Semivarianz basiert, läßt sich ein Teil der Absonderlichkeiten des μ-σ-Kriteriums beseitigen.

Für die zugehörige Nutzenfunktion folgt aus der Tatsache, daß Werte von $v > v^*$ keinen Eingang in das Risikomaß finden, daß sie für solche Werte linear sein muß, während die Nutzenfunktion für $v < v^*$ natürlich konkav sein muß, um Risikofurcht darstellen zu können. Bildet man nun probehalber für

(30) $$U(v) = v - \alpha\left[\min(v - v^*, 0)\right]^2$$

die mathematische Erwartung, dann findet man tatsächlich mit

(31) $$\begin{aligned} E[U(V)] &= E(V) - \alpha \int_{-\infty}^{v^*} (v - v^*)^2 f(v)\, dv \\ &= E(V) - \alpha\, \sigma_{v^*}^2(V) \end{aligned}$$

ein geeignetes Präferenzfunktional in Termini des erwarteten Vermögens und der Semivarianz[18]. Die Abb. 20 faßt die zugehörige Nutzenfunktion (30) ($U(v)$ wurde so verschoben, daß $U(0) = 0$) und die mit (31) festgelegten Indifferenzkurven zusammen[19].

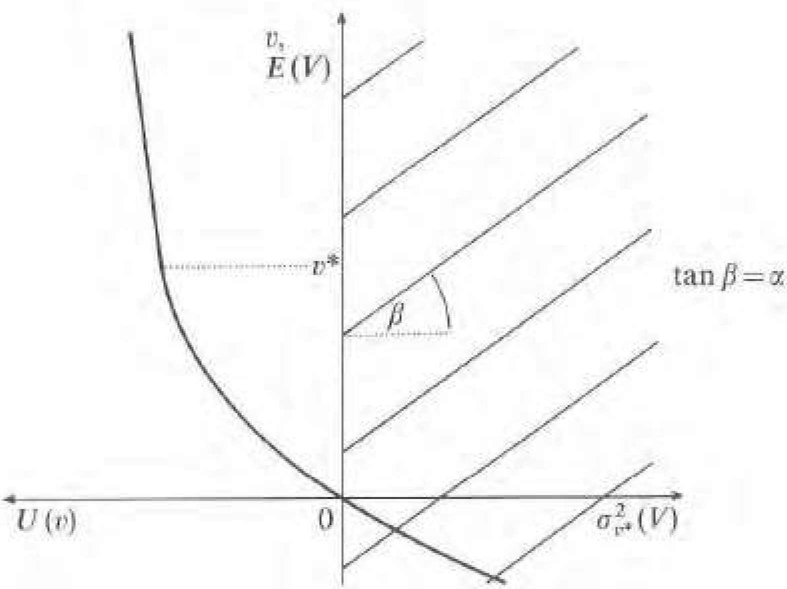


Abbildung 20

[18] MARKOWITZ (1970, S. 290).

[19] In Analogie zum μ-σ-Kriterium könnte man statt $\sigma_{v^*}^2(V)$ auch $\sigma_{v^*}(V)$ verwenden. In diesem Fall erhielte man eine Schar durch senkrechte Verschiebung ineinander überführbarer konvexer Indifferenzkurven.

Dieses Bild einer Präferenzstruktur sieht schon sehr viel realistischer aus. Durch das lineare Teilstück der Nutzenkurve wird die Absurdität des fallenden Grenznutzens vermieden. Auch die Frage nach der Vermögensabhängigkeit des subjektiven Risikopreises wird zufriedenstellend beantwortet: Mit wachsendem Vermögen a, jedoch gegebener Einkommensverteilung Y nimmt natürlich die Semivarianz

$$\text{(32)} \qquad \begin{aligned} \sigma_{v^*}^2(V) &= \int_{-\infty}^{v^*} (v-v^*)^2 f(v)\, dv \\ &= \int_{-\infty}^{v^*-a} (y+a-v^*)^2 f(a+y)\, dy \end{aligned}$$

und mit ihr der subjektive Risikopreis $\pi(V) = \alpha\sigma_{v^*}^2(V)$ solange ab, wie es für die Unterschreitung von v^* noch eine positive Wahrscheinlichkeit gibt. Unplausibel ist nur, daß dann, wenn die gesamte Verteilung oberhalb v^* liegt, die Risikofurcht gänzlich verschwinden soll. Aber das ist ein vergleichsweise geringer Defekt, da sich v^* ja so wählen läßt, daß die zu bewertenden Verteilungen nicht sämtlich darüber liegen.

Neben der gerade diskutierten Version der Semivarianz hatte Markowitz auch den Fall $v^* = E(V)$ im Auge. Für ihn läßt sich keine Nutzenfunktion finden, da die Grenze v^* zwischen ihrem linearen und ihrem konvexen Bereich von Verteilung zu Verteilung variieren müßte.

2.1.5. Ergebnis

Zieht man nun das Resümee, dann ist dem *Domar-Musgrave-*, dem *Krelle-Schneider-*, dem μ-σ- und dem *Mittelwert-Semivarianz-Kriterium* zu bescheinigen, daß sich Präferenzstrukturen finden lassen, die völlig identisch auch mit Hilfe einer Risikonutzenfunktion dargestellt werden können, ohne daß eine Einschränkung der Klasse der zu bewertenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen nötig wäre. Diese Aussage gilt sogar für die *operationalisierte Version des Krelle-Schneider-Kriteriums*, bei der davon ausgegangen wird, daß proportionale Änderungen der Gewinn- und Verlustverteilungen zu gleich großen porportionalen Änderungen der äquivalenten Gewinne und Verluste führen.

Die sich ergebenden Präferenzstrukturen sind indes mitunter nicht sehr plausibel. Besonders hervorzuheben ist folgendes: Wegen linearer Indifferenzkurven läßt sich beim Domar-Musgrave-Kriterium die Steuerwirkungsanalyse, zu deren Zweck es geschaffen wurde, nicht mehr sinnvoll durchführen. Die aus dem gleichen Grunde geschaffene operationalisierte Version des Krelle-Schneider-Kriteriums schneidet da besser ab, weil konvexe Indifferenzkurvenverläufe zulässig sind; unplausibel sind aber die zugehörigen Nutzenkurven. Sie haben im relevanten Bereich sämtlich Risikovorliebe anzeigende, konvexe Stücke. Das μ-σ-Kriterium impliziert einen teilweise negativen Vermögensgrenznutzen und durchweg eine mit wachsendem Vermögen zunehmende Risikofurcht; das eine wie das andere ist absurd. Günstig schneidet das Mittelwert-Semivarianz-Kriterium ab, doch daß mit wachsendem Vermögen die Risikofurcht schließlich völlig verschwindet, steht auch nicht im Einklang mit der Wirklichkeit.

Im ganzen gesehen zeigt sich eine inverse Beziehung zwischen der Operationalität der Kriterien und der Plausibilität der Präferenzstrukturen, die sie mit dem Erwartungsnutzenkriterium gemein haben, damit also ein Dilemma bei unserer Suche nach einer operationalen Alternative zu letzterem. So bringt z.B. das noch relativ realistisch anmutende Mittelwert-Semivarianz-Kriterium keinen erkennbaren Vorzug gegenüber dem Erwartungsnutzenkriterium: Damit man es benutzen kann, muß, wie dort unerläßlich, die gesamte Gestalt der zu bewertenden Verteilungen bekannt sein. Glücklicherweise gibt es aus dem Dilemma aber einen Ausweg, der wider Erwarten das zunächst so unplausibel erscheinende μ-σ-Kriterium zu unserem Favoriten macht.

Von der Operationalität her ist dieses Kriterium ja wegen der leichten mathematischen Handhabbarkeit seiner Parameter äußerst günstig zu beurteilen. Als ganz typisches Beispiel sei die Berechnung von μ und σ für eine Summenvariable zu nennen, die aus den entsprechenden Parametern der Summanden auf simple Weise vorgenommen werden kann, ohne daß man sich komplizierter, möglicherweise numerischer Verfahren zur Ermittlung der Gestalt der Summenverteilung bedienen müßte.

Der Ausweg aus dem Dilemma besteht darin, daß man darauf verzichtet, völlig unplausible Nutzenfunktionen exakt im μ-σ-Diagramm abzubilden, und sich statt dessen bemüht, realistische, vielleicht durch Befragung ermittelte, Nutzenfunktionen zu approximieren. Damit beschäftigen sich die beiden folgenden Unterabschnitte 2.2 und 2.3. Sie spezifizieren beide die oben bereits aus allgemeiner Sicht angedeuteten Möglichkeiten einer Darstellung beliebiger Präferenzstrukturen im μ-σ-Diagramm für den konkreten Fall der Abbildung einer vorgegebenen Nutzenindexkurve.

2.2. *Die quadratische Punktapproximation*

2.2.1. Die asymptotische Effizienz der Varianz

Wenn schon die wahre Nutzenfunktion nicht quadratisch ist, so kann man doch versuchen, sie durch eine quadratische Funktion (Parabel) zu approximieren. Hierfür gibt es zwei Wege. Der erste entspricht dem Vorgehen im vorigen Abschnitt, denn er besteht darin, die wahre Nutzenkurve im Bereich der zu bewertenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen *global* durch eine quadratische zu ersetzen, also bei der Funktion

$$E[U(V)] = E(V) - \alpha E^2(V) - \alpha\sigma^2(V)$$

den Parameter α passend zu wählen[20]. Der zweite Weg einer Approximation ist dadurch gekennzeichnet, daß für alle zu bewertenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen die Nutzenkurve jeweils *an der Stelle des erwarteten Vermögens* durch eine Parabel ersetzt wird. Wir wollen daher von einer „Punktapproximation" sprechen. Die Abb. 14 zeigt die Unterschiede beider Methoden an Hand der (leichter zu zeichnenden) Grenznutzenkurven auf, die, wie eine Differentiation von (26) zeigt, linear sind[21]. Auf diesen zweiten, von Farrar (1962, S. 20f.) eingeschlagenen, aber noch nicht bis zur theoretischen Fundierung verfolgten Weg wollen wir uns jetzt begeben[22].

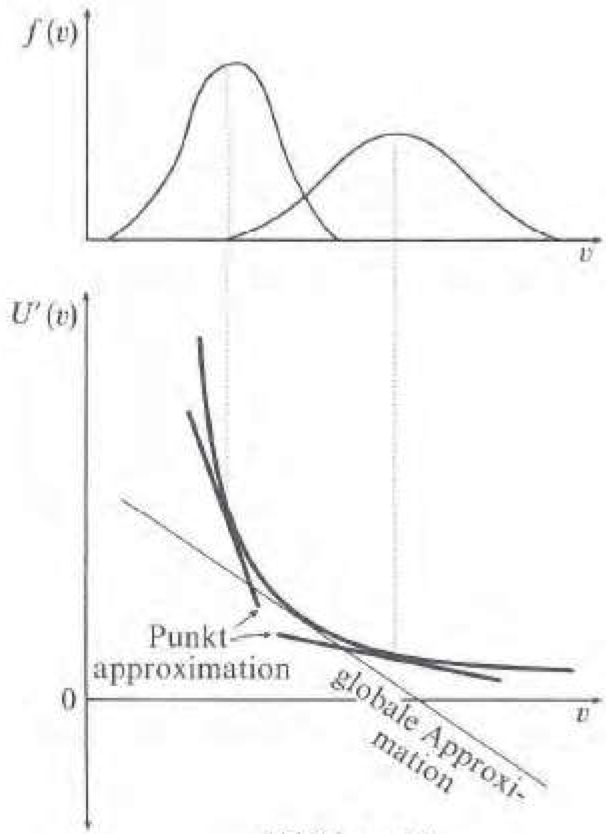


Abbildung 14

[20] Die Nützlichkeit der *Global*approximation für kleine Streuungen wird von Samuelson (1970) aufgezeigt. (Im Ansatz legt er seine Argumentation bereits in einem anderen Beitrag (1967, S. 9, Punkt 2) dar.) Samuelsons Approximationsmethode besteht, bildlich gesprochen, darin, daß die Steigung der zur Approximation verwendeten Grenznutzenkurve an der Stelle $v=a$ (Anfangsvermögen) der Steigung der wahren Grenznutzenkurve angepaßt wird.

[21] Da die Nutzenfunktion bis auf eine Lineartransformation bestimmt ist, Konstanten bei der Differentiation aber verschwinden, ist die Grenznutzenfunktion bis auf die Multiplikation mit einer positiven Konstanten bestimmt.

[22] Angewendet wurde Farrars Methode auch von Pratt (1964, S. 125) und Arrow (1965, S. 32–35). An Hand von Beispielen machen Markowitz (1970, S. 120–125) und Tsiang (1972, S. 355–362) die Punktapproximation plausibel, während ihr Levy (1974) und Loistl (1976) mit anderen Beispielen eine schlechte Approximationsgüte nachzuweisen versuchen. Vgl. auch Tsiangs (1974) Antwort auf Levys Kritik.

Eine Grundannahme dabei ist, daß es um μ herum einen Bereich gibt, in dem sich die wahre Nutzenfunktion in eine Taylor-Reihe entwickeln läßt. Es muß also einen Bereich geben, wo die wahre Funktion durch ein Polynom (von möglicherweise unendlicher Ordnung) abgebildet werden kann, indem alle Ableitungen der wahren Funktion an der Stelle μ mit den Ableitungen des Polynoms gleichgesetzt werden. Ist diese Grundannahme nicht erfüllt, so wird ein erster Approximationsschritt benötigt, der darin besteht, die wahre Funktion möglichst gut durch ein Polynom abzubilden. *Diesen* Approximationsschritt betrachten wir hier nicht näher. Vielmehr geht es darum zu prüfen, wie das Polynom seinerseits approximiert werden kann.

Mit Hilfe des Polynoms läßt sich nun der Nutzen an einer Stelle $\mu+d$ durch die Entwicklung einer Taylor-Reihe an der Stelle μ errechnen[23]:

$$(33) \qquad U(\mu+d)=U(\mu)+d^1\frac{U^{(1)}(\mu)}{1!}+d^2\frac{U^{(2)}(\mu)}{2!}+d^3\frac{U^{(3)}(\mu)}{3!}+\ldots$$

Diese Formel läßt sich für die Bewertung einer ganzen Wahrscheinlichkeitsverteilung verwenden, wenn man unterstellt, daß alle ihre Ausprägungen in den Gültigkeitsbereich des Polynoms fallen. Definieren wir

$$(34) \qquad v\equiv\mu+d \quad \text{bzw.} \quad V\equiv\mu+D,$$

dann wird nach Anwendung des Erwartungsoperators aus (33):

$$(35) \qquad E[U(V)]=U(\mu)+E(D^1)\frac{U^{(1)}(\mu)}{1!}+E(D^2)\frac{U^{(2)}(\mu)}{2!} + E(D^3)\frac{U^{(3)}(\mu)}{3!}+\ldots$$

Hieraus wiederum folgt, weil nach Konstruktion $E(D^1)=0$,

$$(36) \qquad E[U(V)]=U(\mu)+E(D^2)\frac{U^{(2)}(\mu)}{2!}+E(D^3)\frac{U^{(3)}(\mu)}{3!}+\ldots,$$

wobei $E(D^2)=\sigma^2(V)$.

Der Erwartungsnutzen wird somit als Funktion der Momente μ, $E(D^2)$, $E(D^3)$, ... der zu bewertenden Verteilung dargestellt. Das ist eine interessante Parallele zu einem im Anschluß an die Diskussion der zweiparametrischen Kriterien gefundenen Ergebnis. Dort hatten wir nämlich festgestellt, daß man die Präferenzordnung über beliebige Verteilungen in der Regel nur dann richtig nachbilden kann, wenn alle Momente in Betracht gezogen

[23] $U^{(n)}(v)$ bezeichnet die n-te Ableitung des Polynoms $U(.)$ an der Stelle v.

werden, so daß eine exakte Verteilungsbeschreibung möglich ist. Wir sehen jetzt, wann eine Ausnahme von dieser Regel vorliegt. Das ist dann der Fall, wenn die wahre Nutzenfunktion tatsächlich ein Polynom endlicher Ordnung ist, denn da von einem Polynom i-ter Ordnung nur die ersten i-Ableitungen existieren, würden in (36) alle Glieder von höherer Ordnung als i verschwinden[24]. Freilich berechtigt uns nichts zu der Annahme, daß die Nutzenfunktion der Menschen bereits durch ein Polynom endlicher Ordnung exakt beschrieben werden kann.

Die Frage, die uns jetzt interessiert, ist, ob man Ableitungen und Momente von höherer Ordnung als 2 vernachlässigen darf, ob man also das Polynom durch eine Parabel approximieren darf. Um sie zu beantworten, betrachten wir die Menge aller möglicherweise vorkommenden Vermögensverteilungen mit gleichem Mittelwert, deren Streubereich den durch ein Polynom abbildbaren Bereich der wahren Nutzenfunktion nicht überschreitet. Diese Menge werde vollständig in unterschiedliche lineare Verteilungsklassen, die je durch die Verteilung einer standardisierten Zufallsvariablen Z gekennzeichnet sind[25], und in Klassen unterschiedlicher Standardabweichungen $\sigma(V)$ aufgeteilt. Mit der Angabe von Z und $\sigma(V)$ ist ein Element der Menge dann genau beschrieben. Greifen wir zwei beliebige Verteilungen $V_1=\mu+D_1$ und $V_2=\mu+D_2$ aus dieser Menge heraus, so kann die aus der Sicht des Entscheidungsträgers bessere an Hand des Vorzeichens der Erwartungsnutzendifferenz

$$(37)\qquad \begin{aligned}\Delta U &= E\left[U(\mu+D_1)\right]-E\left[U(\mu+D_2)\right]\\ &=\sum_{i=2}^{m} S_i,\end{aligned}$$

wobei

$$(38)\qquad S_i \equiv \frac{U^{(i)}(\mu)}{i!}\left[E(D_1^i)-E(D_2^i)\right],$$

festgestellt werden.

Gesetzt den Fall, ein Entscheidungsträger habe sich entschlossen, nur den ersten Summanden, d.h. die Varianz, zur Bewertung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu Rate zu ziehen, so begeht er jedenfalls dann keinen Fehler, wenn

$$(39)\qquad |S_2| > \left|\sum_{i=3}^{m} S_i\right| .$$

[24] Das wurde von RICHTER (1959/60) festgestellt.
[25] Vgl. S. 64.

Leider können wir im allgemeinen Fall nicht annehmen, daß diese Ungleichung erfüllt ist. Es lassen sich aber Aussagen darüber gewinnen, wann sie gilt. Zu diesem Zweck greifen wir weitere Verteilungspaare aus der Menge der möglichen Vermögensverteilungen heraus. Sie sollen sich von dem zunächst betrachteten Paar nur durch die absolute Höhe der Standardabweichungen unterscheiden, aber den beiden gleichen linearen Klassen angehören. Darüber hinaus soll die Relation der Standardabweichungen beider Verteilungen unverändert bleiben. Nennen wir die Relation der jeweils neuen Standardabweichung zur entsprechenden alten λ, dann wird wegen

$$\lambda^i S_i = \frac{U^{(i)}(\mu)}{i!} \{E[(D_1\lambda)^i] - E[(D_2\lambda)^i]\} \tag{40}$$

die Erwartungsnutzendifferenz für die neuen Verteilungen zu

$$\Delta U = \sum_{i=2}^{m} \lambda^i S_i \tag{41}$$

und die Bedingung (39) zu

$$|\lambda^2 S_2| > \left|\sum_{i=3}^{m} \lambda^i S_i\right| \tag{42}$$

bzw.

$$|S_2| > \left|\sum_{i=3}^{m} \lambda^{i-2} S_i\right| . \tag{43}$$

Da hier offenkundig die rechte Seite der Ungleichung bei $\lambda \to 0$ verschwindet, muß es im Falle $|S_2| > 0$ ein kritisches Niveau λ^* für die Standardabweichungen der zu vergleichenden Verteilungspaare geben, unterhalb dessen der Entscheidungsträger sich bei der Bewertung auf die Varianz allein verlassen kann. Beschränkt er sich bereits auf die Varianz, bevor $\lambda < \lambda^*$ geworden ist, dann kann es sein, daß er zum richtigen Ergebnis kommt, es muß aber nicht sein. Die Zusammenhänge kann man sich an Hand der Abb. 22 noch einmal klar machen.

Bemerkenswert ist, was an dieser Abbildung deutlich wird, daß bei der Diskriminierung zwischen zwei Verteilungen gerade dann auf die Standardabweichungen Verlaß ist, wenn sie klein sind, obwohl doch in diesem Fall auch die absolute Differenz zwischen ihnen klein ist, so daß man von daher die Diskriminierung für schwieriger halten sollte.

Nun ist zu bedenken, daß es dem Entscheidungsträger wenig nützt, wenn er weiß, daß er unterhalb eines λ^* zwischen zwei ganz bestimmten linearen Verteilungsklassen an Hand der Standardabweichungen unterscheiden darf.

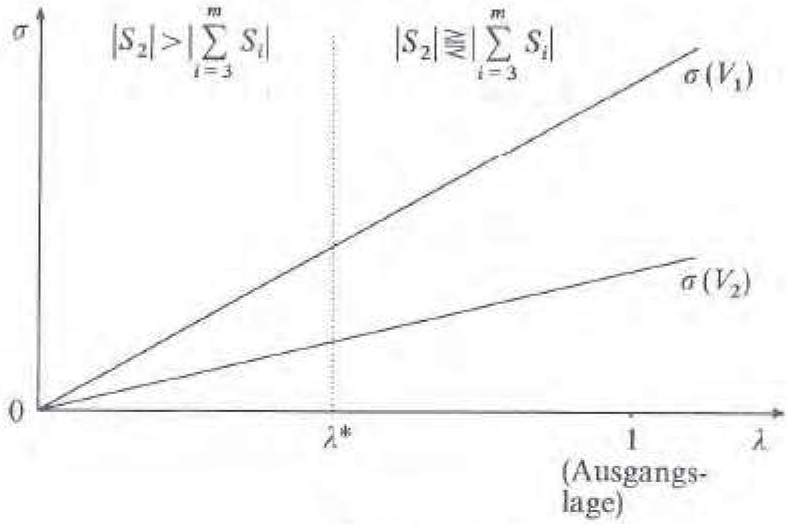


Abbildung 22

Sein Problem ist ja, daß er nicht weiß, welche linearen Klassen vorliegen! Ihm kann aber geholfen werden. Die Prozedur, die wir hier für den Vergleich zweier vorgegebener linearer Verteilungsklassen vorgenommen haben, kann nämlich für eine Kombination beliebiger anderer linearer Verteilungsklassen mit jedoch gleichem $\sigma(V_1)$ und $\sigma(V_2)$ in der Ausgangslage wiederholt werden. Jedesmal ermittelt man ein $\lambda^* > 0$, wenn auch nicht immer das gleiche. So kommt man zu einem Vergleich aller linearen Verteilungsklassen und es stellt sich heraus, daß es bei einer beliebig vorgegebenen Menge für möglich gehaltener Verteilungsklassen eine absolute Untergrenze λ^{**}, $0 < \lambda^{**} \leq \lambda^*$, gibt, unterhalb derer sich der Entscheidungsträger auf die Standardabweichungen verlassen kann, *ohne* zu wissen, welchen linearen Klassen die verglichenen Verteilungen im einzelnen angehören.

Eine weitere Verallgemeinerung des Ergebnisses erreicht man, wenn zusätzlich andere Verhältnisse $\sigma(V_1)/\sigma(V_2)$ untersucht werden, die unterschiedliche Ansprüche an die Genauigkeit der Bewertung verkörpern. In jedem Fall reichen aber von Null verschiedene Werte beider Standardabweichungen aus, um zur richtigen Wahl zu kommen, wenn nur $\sigma(V_1) \neq \sigma(V_2)$.

So können wir schließen: Sollen Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit gleichem Mittelwert allein an Hand ihrer Standardabweichungen verglichen werden und soll dabei eine gegebene, durch den relativen Abstand der Standardabweichungen angegebene Genauigkeit beachtet werden, so kommt man jedenfalls dann zur richtigen Bewertung, wenn die Standardabweichungen unter einer bestimmten, von Null verschiedenen Obergrenze liegen. Wo sich diese Obergrenze befindet, hängt davon ab, welche linearen Verteilungsklassen überhaupt für möglich gehalten werden.

Eine bislang ungeklärte Frage ist, welche Wahl im Fall gleicher Standardabweichungen ($S_2 = 0$) getroffen werden soll. Daß dann Indifferenz besteht, darf man natürlich nicht annehmen, denn zwar haben wir gesehen, daß man unter bestimmten Bedingungen die Glieder höherer Ordnung in (41) vernachlässigen darf, doch gleichwohl bleiben diese Glieder existent. Die Antwort liegt darin, in Analogie zu (42) und (43)

$$(44) \qquad |\lambda^3 S_3| > \left| \sum_{i=4}^{m} \lambda^i S_i \right|$$

und

$$(45) \qquad |S_3| > \left| \sum_{i=4}^{m} \lambda^{i-3} S_i \right|$$

zu verlangen. Mit der gleichen Argumentation wie oben läßt sich dann nämlich zeigen, daß auch für das dritte Moment ein kritisches Niveau der Standardabweichungen der zu vergleichenden Verteilungen existiert, unterhalb dessen alle höheren Momente vernachlässigt werden dürfen. In dieser Weise kann man fortfahren, wenn auch die dritten Momente einander gleichen usw. So zeigt sich, daß es für genügend kleine Standardabweichungen eine *lexikographische Ordnung der Momente* gibt und die an Hand einer unvollständigen Liste der Momente gefundene Indifferenz in Wahrheit eine Pseudoindifferenz sein kann. Die Tatsache, daß innerhalb dieser lexikographischen Ordnung das zweite Moment auf einer höheren Rangstufe als alle Momente „höherer Ordnung" steht, wie man mißverständlich zu sagen pflegt, begründet die asymptotische Effizienz des μ-σ-Kriteriums.

2.2.2. Beispiele

Zur Illustration und für den späteren Gebrauch sollen jetzt die Implikationen der vorangegangenen Überlegungen zur Punktapproximation für die speziellen Nutzenfunktionen

$$(46) \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad U(v) = -e^{-\alpha v}, \qquad \alpha > 0, \\ &\text{(b)} \quad U(v) = \ln v, \\ &\text{(c)} \quad U(v) = \gamma v^{\gamma}, \qquad \gamma \neq 0, \end{aligned}$$

untersucht werden. Zunächst berechnen wir die i-ten Ableitungen dieser Funktionen an der Stelle μ; sie lauten:

$$(47) \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad U^{(i)}(\mu) = -(-\alpha)^i e^{-\alpha\mu}, \\ &\text{(b)} \quad U^{(i)}(\mu) = \mu^{-i} \prod_{k=1}^{i-1} (-k), \\ &\text{(c)} \quad U^{(i)}(\mu) = \mu^{\gamma-i} \gamma \prod_{k=0}^{i-1} (\gamma - k). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Ableitungen prüfen wir dann, ob unsere Grundvoraussetzung, daß die betrachteten Funktionen überhaupt durch ein Polynom abgebildet werden können, erfüllt ist, und berechnen nach der Lagrange-Formel

$$R_i = \frac{1}{i!} d^i U^{(i)}(\mu + \Theta d), \quad 0 \leq \Theta \leq 1,$$

den Wert des Restgliedes

$$\frac{d^i U^{(i)}(\mu)}{i!} + \frac{d^{i+1} U^{(i+1)}(\mu)}{(i+1)!} + \ldots$$

Wenn unsere Grundvoraussetzung exakt erfüllt sein soll, dann muß R_i für alle zulässigen Werte von Θ bei $i \to \infty$ verschwinden. Man errechnet:

$$\text{(48)} \quad \text{(a)} \quad \lim_{i \to \infty} \left[R_i = -\frac{(-\alpha d)^i}{i!} e^{-\alpha(\mu + \Theta d)} \right] = 0, \quad \text{wenn} \quad -\infty < d < \infty,$$

$$\text{(b)} \quad \lim_{i \to \infty} \left[R_i = \frac{(-1)^{i-1}}{i} \left(\frac{d}{\mu + \Theta d} \right)^i \right] = 0, \quad \text{wenn} \quad \frac{1}{2} \leq \frac{\mu + d}{\mu} \leq 2,$$

$$\text{(c)} \quad \lim_{i \to \infty} \left[R_i = \left(\frac{d}{\mu + \Theta d} \right)^i (\mu + \alpha d)^\gamma \, \gamma \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\gamma - k}{k+1} \right] = 0, \quad \text{wenn} \quad \frac{1}{2} \leq \frac{\mu + d}{\mu} \leq 2.$$

Während also im Fall (*a*) die gesamte Funktion in eine Taylor-Reihe entwickelt werden kann, müssen die Standardabweichungen der zu bewertenden Verteilungen in den Fällen (*b*) und (*c*) von vornherein so klein sein, daß der Streubereich nicht unter die Hälfte und über das Doppelte des Mittelwertes hinausragt, wenn die oben genannte Grundvoraussetzung erfüllt sein soll[26].

---

[26] Daß es Loistl (1976) gelingt, die unzureichende Approximationsgüte einer Taylor-Expansion von $\ln v$ und γv^γ für die Normalverteilung (Streubereich $-\infty$ bis $+\infty$) und die logarithmische Normalverteilung (Streubereich von 0 bis $+\infty$) an Beispielen zu verdeutlichen, braucht uns nicht zu wundern. Loistls sehr pauschal formulierte Ablehnung der Taylor-Expansion (S. 909), die nur mit der Untersuchung der genannten Verteilungen begründet wurde, ist in dieser Form nicht haltbar. Im übrigen sind Loistls Ergebnisse selbst für diese Verteilungen zu bezweifeln, weil in den Beispielen die Variationskoeffizienten viel zu groß gewählt wurden. Das liegt daran, daß die genannten Funktionen nicht auf das Vermögen, sondern auf das Einkommen angewendet wurden. Bezöge man die gleichen Einkommensstreuungen auf das Vermögen, dann kämen sicher sehr viel bessere Approximationen zustande. Es sei noch angemerkt, daß Loistl (S. 906) mit $0 \leq (\mu + d)/\mu) \leq 2$ einen falschen Gültigkeitsbereich der Taylor-Expansion angibt; vgl. (48).

Nun verwenden wir die Ableitungen aus (47) zur Spezifizierung für S_i aus (38). (42) wird dann je nach zugrundeliegender Nutzenfunktion zu einer der drei folgenden Ungleichungen:

$$(49) \qquad \text{(a)} \quad \left|\lambda^2 \frac{-\alpha^2}{2} x_2\right| > \left|\sum_{i=3}^{m} \lambda^i \frac{-(-\alpha)^i}{i!} x_i\right|,$$

$$\text{(b)} \quad \left|\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right) x_2\right| > \left|\sum_{i=3}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{\prod_{k=1}^{i-1} -k}{i!} x_i\right|,$$

$$\text{(c)} \quad \left|\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{\gamma^2(\gamma-1)}{2} x_2\right| > \left|\sum_{i=3}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{\gamma \prod_{k=0}^{i-1} (\gamma-k)}{i!} x_i\right|,$$

$$\text{mit} \quad x_i \equiv E(D_1^i) - E(D_2^i).$$

Bemerkenswert ist hierbei vor allem, daß in (*b*) und (*c*) der Erwartungswert der zu bewertenden Verteilungen auftaucht, während er in (*a*) eliminiert werden konnte. Der Erwartungswert hat einen wichtigen Einfluß. Unterstellen wir, bei gegebenem μ sei für (*b*) oder (*c*) ein kritisches λ^*, also eine kritische Standardabweichung, unterhalb derer gegebene relative Abweichungen der Standardabweichungen zur Bewertung herangezogen werden dürfen, festgestellt worden. Dann muß für veränderte μ die kritische Standardabweichung im gleichen proportionalen Ausmaß verändert werden, denn die Ungleichungen (*b*) und (*c*) bleiben unberührt, solange nur $\lambda/\mu = \text{const}$. Da diese Aussage für den Vergleich von Verteilungen aus allen möglichen linearen Klassen gilt, folgt auch, daß das Minimum aller erzielbaren λ^*, λ^{**}, in fester Relation zum Erwartungswert steht, solange die Menge der überhaupt nur möglichen linearen Verteilungsklassen sich nicht mit dem Mittelwert der zu bewertenden Vermögensverteilungen ändert. Hieraus folgt, daß man im μ-σ-Diagramm einen Ursprungsstrahl für $\lambda = \lambda^{**}$ einzeichnen könnte, der mit der μ-Achse einen Bereich einschließt, in dem für einen gegebenen Genauigkeitsanspruch verläßliche Indifferenzkurven gezeichnet werden können.

Ein ähnliches Ergebnis hält Tsiang (1972) bei *allen* in (46) genannten Nutzenfunktionen für plausibel. Was die Funktion $U(v) = -e^{-\alpha v}$ betrifft, können wir ihm aber nicht zustimmen, denn Ungleichung (*a*) in (49) ist von μ unabhängig. Bei einer gegebenen, mit μ nicht veränderlichen Menge von möglichen linearen Verteilungsklassen hat man daher statt eines Ursprungsstrahls als Grenze des „verläßlichen Bereichs" eine Parallele zur μ-Achse einzuzeichnen. Tsiangs Argument ist denn auch anderer Natur. Er behauptet (S. 358), daß der gesamte Kurvenverlauf nötigenfalls vom erwarteten

Vermögen abhängig gemacht werden müsse. Bei ihm ist daher bei der Funktion (a) in (46) der Parameter α eine Funktion des ermittelten Vermögens: $\alpha = k/\mu$, $k = \text{const.}$ Auf diesen Ansatz soll an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden. Im Kapitel III A 2.1 wird sich erweisen, daß er ein inkonsistentes Verhalten impliziert.

2.2.3. Der Verlauf der Pseudo-Indifferenzkurven im μ-σ-Diagramm

Damit ist der Boden bereitet, um die Farrar-Methode der punktuellen quadratischen Approximation der wahren Nutzenindexkurve anzuwenden: Wegen $E(D^2) = \sigma^2(V)$ darf (35) für kleine Streuungen zu

$$E[U(V)] = U(\mu, \sigma) \approx U(\mu) + \frac{\sigma^2(V)\, U''(\mu)}{2} \tag{50}$$

vereinfacht werden.

Hieraus lassen sich leicht einige Eigenschaften der Pseudo-Indifferenzkurven im μ-σ-Diagramm ergründen. (Von *Pseudo*-Indifferenzkurven müssen wir hier wegen der lexikographischen Ordnung der Momente sprechen.) Stellen wir uns für einen Moment einmal vor, daß $U''(\mu) = \text{const.}$ für alle μ. In diesem Fall stimmt die Punktapproximation global, denn immer ermittelt man die Nutzenfunktion

$$U(v) = v - \alpha v^2 \quad \text{mit} \quad \alpha = -\frac{U''(v)}{2}.$$

Es liegen dann echte Indifferenzkurven vor, die, wie im vorigen Abschnitt erörtert (vgl. Abb. 18), durch Kreise, deren Zentrum auf der v-Achse an der Stelle $1/(2\alpha)$ liegt, beschrieben werden. Was ändert sich, wenn $U''(\mu)$ variabel ist?

In diesem Fall ist das kreisförmige Indifferenzkurvensystem nicht nutzlos, denn immerhin stimmen die Sicherheitsäquivalente für Projekte mit einem gegebenem $\mu = \mu^*$, wenn das Kreiszentrum bei $v = -1/U''(\mu^*)$ eingerichtet wird. Diese Tatsache erklärt sich daraus, daß (50) den Erwartungsnutzen $E[U(V)]$ und damit auch das Sicherheitsäquivalent dieses Erwartungsnutzens $U^{-1}\{E[U(V)]\}$ richtig approximiert. Abb. 23 verdeutlicht den Fall für ein Projekt (μ^*, σ^*), das durch ein Kreisbogenstück mit der v-Achse bzw. dem Sicherheitsäquivalent $S(V)$ verbunden ist. Dieses Kreisbogenstück fällt bei $U''' \neq 0$ nicht mit der wahren Pseudo-Indifferenzkurve zusammen, hat aber mit ihr die Punkte $(S(V), 0)$ und (μ^*, σ^*) gemein.

Warum eine vollständige Kongruenz nicht vorliegt, zeigt sich, wenn man aus (50) die Steigung der Pseudo-Indifferenzkurven direkt errechnet:

(51) $$\left.\frac{d\mu}{d\sigma}\right|_{U(\mu,\sigma)} = -\frac{\dfrac{\partial U(\mu,\sigma)}{\partial\sigma}}{\dfrac{\partial U(\mu,\sigma)}{\partial\mu}} \approx -\frac{\sigma\, U''(\mu)}{U'(\mu)+\dfrac{\sigma^2}{2}U'''(\mu)}.$$

Bei $U'''(\mu)>0$ ist die Steigung für alle σ bei einem gegebenen μ kleiner, bei $U'''<0$ hingegen größer als bei den zugehörigen Kreisbögen[27]. Für die durch den Punkt (μ^*, σ^*) führenden Pseudo-Indifferenzkurven ergeben sich daher die in der Abb. 23 dargestellten Möglichkeiten. Bemerkenswert ist, daß diese Modifikationen des Kurvenverlaufs die Steigung (selbst bei $U'''<0$) nicht negativ machen können[28], was folgendermaßen zu begründen ist: Der Nenner von (51) ist sicher positiv, wenn nur σ genügend klein ist. Sollte er mit vergrößertem Wert von σ negativ werden, müßte er zuvor auch irgendwo den Wert Null annehmen. An dieser Stelle wären dann aber die Indifferenzkurven unterbrochen, so daß die Punkte (μ^*, σ^*) und $(S(V), 0)$ nicht auf einer Indifferenzkurve liegen könnten, was sie in Wahrheit tun. So haben wir

(52) $$\left.\frac{d\mu}{d\sigma}\right|_{U(\mu,\sigma)} > 0, \quad \sigma > 0, \quad \text{und} \quad \lim_{\sigma\to 0} \left.\frac{d\mu}{d\sigma}\right|_{U(\mu,\sigma)} = 0.$$

Der Fall $\sigma \to 0$ ist von einiger Bedeutung, besagt er doch, daß die Indifferenzkurven senkrecht in die v-Achse einmünden müssen[29].

---

[27] $U'''>0$ (bzw. $U'''<0$) impliziert auch eine Präferenz für (bzw. Abneigung gegen) linkssteile Verteilungen (vgl. S. 63f.), ihr kommt hier aber wegen $E(D^3)\approx 0$ keine Bedeutung zu. $U'''(.)$ trägt nur die Information, wie sich $U''(\mu)$ und damit das zur Konstruktion des Sicherheitsäquivalents verwendete Kreiszentrum $-1/U''(\mu)$ mit μ verändert. Das wird bei HOCHGESAND (1974, S. 45f.) und TSIANG (1972, S. 356 u. 364), die U''' fortlassen, nicht bedacht. Bei TSIANG (1974, Anhang) werden aber die korrigierten Formeln genannt.

[28] Es wird immer unter der Hypothese der Risikofurcht ($U''<0$) argumentiert.

[29] Diese Eigenschaft der Indifferenzkurven wird mitunter bei zeichnerischen Darstellungen nicht berücksichtigt. Siehe z.B. LUTZ (1951, S. 190f.), aber auch FAMA und MILLER (1972, S. 220, 222, 223, 282). $d\mu/d\sigma=0$ bei $\sigma=0$ folgt aus Gleichung (9) bei TOBIN (1958, S. 13; die Zeichnungen 4 und 7 sind in dieser, dort allerdings unwichtigen Hinsicht falsch) und ist der Inhalt des Satzes 7 bei SCHNEEWEISS (1967a, S. 128). Tobin (implizit) und Schneeweiß (explizit) müssen sich freilich auf Verteilungen, die derselben linearen Klasse angehören, beschränken. Mit der Begründung der Punktapproximation liegt der Nachweis auch für beliebige Verteilungen mit begrenztem Streubereich vor.

Die Unwichtigkeit der Varianz bei der Bewertung kleiner Wahrscheinlichkeitsverteilungen hat übrigens für den Versuch, die Indexkurve experimentell zu bestimmen, die unangenehme Auswirkung, daß man die Versuchsperson über Spiele, deren Gewinnmöglichkeiten den wirklichen Dimensionen ökonomischer Entscheidungen entsprechen, entscheiden lassen muß. Da bei den Experimenten von MOSTELLER und NOGEE (1951) nur Bagatellgewinne vorkommen, sind die von ihnen gelieferten Ergebnisse sicherlich nicht sonderlich genau. Vgl. dazu SAMUELSON (1960, S. 35).

Diese Eigenschaft erweitert unsere Überlegungen zur lexikographischen Ordnung der Momente auf das erste Moment: Bei sehr kleinen Standardabweichungen darf man bei der Bewertung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen sogar auf den Erwartungswert allein abstellen, er nimmt also die höchste Rangstufe ein. Bereits BERNOULLI (1738, S. 33 (§9)) hat dieses Phänomen beobachtet und damit begründet, daß bei sehr kleinen Streuungen die Nutzenkurve „als eine unendlich kleine gerade Linie" betrachtet werden dürfe[30].

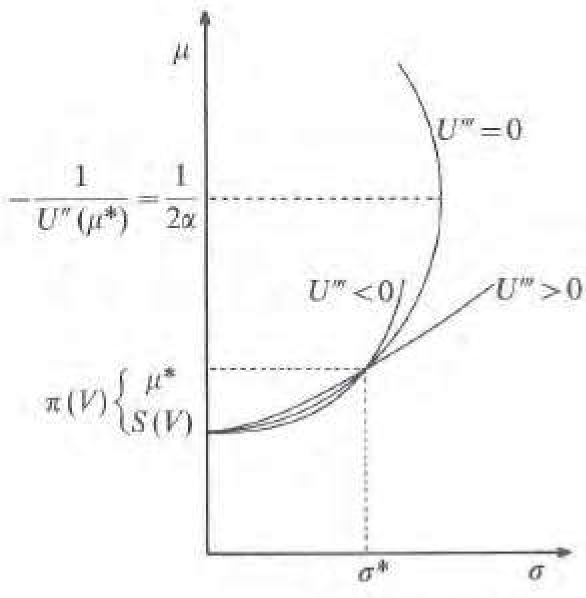


Abbildung 23

Man kann den bisher aufgedeckten Eigenschaften der Indifferenzkurven noch weitere hinzufügen, wenn man verlangt, daß die Risikofurcht, gemessen durch die Intensität der Versicherungsnachfrage $g(aq-C) = [E(C) - \pi(aq-C)]/E(C)$ mit wachsendem Vermögen nicht zunehmen soll. Interessanterweise folgt daraus nämlich, daß $U'''(.) > 0$ sein muß, also nur einer der drei in Abb. 23 gezeigten Indifferenzkurvenverläufe relevant ist[31]. Setzt man, wie es PRATT (1964) vorschlägt,

$$(53) \qquad U[\mu - \pi(V)] \approx U(\mu) - U'(\mu)\,\pi(V), \quad V = aq - C,$$

[30] Vgl. auch LAPLACE (1814, S. XVI).

[31] Den Zusammenhang zwischen der Vermögensabhängigkeit der Risikofurcht und dem Vorzeichen von $U'''(.)$ haben STIGLITZ (1969a, S. 279) und HIRSHLEIFER (1970, S. 283, Fußnote) aufgezeigt.

begnügt man sich also, weil $\pi(V)$ im Vergleich zum gesamten Streubereich klein sein dürfte, mit einer linearen Approximation der Nutzenkurve, um $U(\mu-\pi)$ zu errechnen, so erhält man durch Gleichsetzen von (50) und (53) die folgende Bestimmungsgleichung für π:

$$\begin{aligned} &U[\mu-\pi(V)]=E[U(V)], \\ &U(\mu)-U'(\mu)\pi(V)\approx U(\mu)+\frac{\sigma^2(V)}{2}U''(\mu). \end{aligned} \tag{54}$$

Daraus ergibt sich

$$\pi(V)\approx\frac{\sigma^2(V)}{2}\left(-\frac{U''(\mu)}{U'(\mu)}\right). \tag{55}$$

Da bei einer gegebenen Schadensverteilung die Vergrößerung des Anfangsvermögens wegen $\sigma^2(V)=\sigma^2(aq-C)=\sigma^2(C)=\text{const.}$ nicht zu einer Streuungsveränderung führt, kann ein Anstieg von $\pi(V)$ verhindert werden, wenn

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(-\frac{U''(\mu)}{U'(\mu)}\right)\leq 0 \tag{56}$$

also

$$\frac{-U'''(\mu)\,U'(\mu)+U''^2(\mu)}{U'^2(\mu)}\leq 0$$

und somit auch, was zu zeigen war,

$$U'''(\mu)\geq\frac{U''^2(\mu)}{U'(\mu)}>0. \tag{57}$$

Diese Implikation einer mit wachsendem Vermögen nicht zunehmenden Risikofurcht ist auch deshalb plausibel, weil sie, wie aus (36) zu entnehmen ist, eine eindeutige Ablehnung rechtssteiler Verteilungen, die durch $E(D^3)<0$ gekennzeichnet sind, impliziert. Eine solche Präferenz wurde unter anderem von MARSCHAK (1938, S. 320) und HICKS (1967, S. 119) behauptet. Auch MARKOWITZ (1952a, S. 87–91 u. 1952b, S. 156) hat diese Präferenz beobachtet, doch schrieb er sie Spielern zu, denn Spieler neigen dazu, ihre Einsätze zu verringern, wenn ihr Spielkapital zur Neige zu gehen droht, und zu erhöhen, wenn sie häufig gewonnen haben. Die Gewinnsummenverteilung wird dann automatisch linkssteil. Dieses Phänomen konnten auch MOSTELLER und NOGEE (1951, S. 389) bei ihren Experimenten zur Risikoneigung beobachten. Ob hier tatsächlich nur eine bei Spielern anzutreffende Präferenz vorliegt, kann bezweifelt werden, wenn man an die Einrichtung der Haftungsbeschränkung am Aktienmarkt oder an die von Versicherungsunternehmen nachgefragten *Stop-loss* und *Schadenexcedenten-Rückversicherungen* denkt, alles Anzeichen für das Bestreben, die Wahrscheinlichkeitsverteilungen linkssteil zu machen.

Die Möglichkeit, Indifferenzkurven aus einer quadratischen Punktapproximation der wahren Indexkurve zu erhalten, ist gegen die herkömmliche Kritik am μ-σ-Kriterium immun. Für kleine Streuungen kann dieses Kriterium daher getrost mit dem Erwartungsnutzenkriterium gleichgesetzt werden. Es ist so flexibel, daß sich alle individuellen Besonderheiten der Präferenzstruktur des Entscheidungssubjektes darstellen lassen, ohne daß man dabei eine speziellere Verteilungsannahme als die benötigt, daß alle für möglich gehaltenen linearen Verteilungsklassen in v beschränkt sind.

Für große Streuungen läßt die Approximationsgüte freilich sehr bald nach, so daß dann die auf der Basis der Punktapproximation ermittelten Indifferenzkurven allenfalls in grober Näherung zur optimalen Projektwahl führen.

2.3. *Das Indifferenzkurvensystem im μ-σ-Diagramm für lineare Verteilungsklassen*

Wenn die zu bewertenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen größere Streuungen aufweisen, so bedeutet das Versagen der Punktapproximation noch nicht zwangsläufig, daß Indifferenzkurven im μ-σ-Diagramm nicht mehr existieren, denn wie wir oben (Kap. II A 6) bereits festgestellt haben, muß sich eine jede Präferenzstruktur über Verteilungen einer zweiparametrischen, also z.B. linearen Klasse in einem zweiparametrischen Diagramm darstellen lassen. Da lineare Verteilungsklassen bei manchen Entscheidungsproblemen in exakter Form und bei anderen wegen der Normalverteilungsapproximation wenigstens angenähert auftreten, lohnt es sich, die Beziehungen zwischen Indifferenzkurven für solche Klassen und der von Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktionen zu untersuchen. Wir wollen dies tun und dabei Tobins (1958, S. 12–14) Analyse folgen.

Zunächst schreiben wir den Erwartungsnutzen als

$$(58)\qquad E[U(V)] = E[U(\mu + \sigma Z)] \text{ mit } Z = \frac{V-\mu}{\sigma}, \quad E(Z) = 0, \quad \sigma(Z) = 1.$$

Wenn eine Nutzenfunktion abzubilden ist, die über einen Bereich von $-\infty$ bis $+\infty$ kontinuierlich[32] verläuft, brauchen wir bezüglich des Streubereichs von z keine Einschränkungen vorzunehmen. Wenn der Definitionsbereich

[32] Vgl. Fn. 16, S. 181.

der Funktion jedoch in eine Richtung beschränkt ist oder in einer Richtung eine Unstetigkeitsstelle oder gar eine lexikographische Grenze anzutreffen ist, muß z in dieser Richtung beschränkt sein. Die folgenden Ausführungen gelten dann nur, solange die Ausprägungen der zu bewertenden Vermögensverteilungen den stetigen Definitionsbereich nicht überschreiten können. Wie die (Pseudo-)Indifferenzkurven im Überschreitungsfall beim Vorliegen einer lexikographischen Grenze verlaufen, wurde oben in Abschnitt B 1.1 gezeigt.

Implizite Differentiation bringt nun in völliger Übereinstimmung mit der durch die Methode der Punktapproximation gewonnenen Formel (52):

$$\text{(59)} \qquad \left.\frac{d\mu}{d\sigma}\right|_{U(\mu,\sigma)} = -\frac{E[Z\,U'(\mu+\sigma Z)]}{E[U'(\mu+\sigma Z)]},$$

$$\left.\frac{d\mu}{d\sigma}\right|_{U(\mu,\sigma)} > 0, \quad \text{wenn} \quad \sigma > 0,$$

$$\lim_{\sigma\to 0} \left.\frac{d\mu}{d\sigma}\right|_{U(\mu,\sigma)} = 0.$$

Das Ergebnis ist unschwer zu verstehen. Bei $\sigma\to 0$ wird $U'(\mu)=\text{const.}$, kann also vor den Erwartungsoperator gezogen werden, so daß

$$\lim_{\sigma\to 0} \left.\frac{d\mu}{d\sigma}\right|_{U(\mu,\sigma)} = -\frac{U'(\mu)\,E(Z)}{U'(\mu)} = 0.$$

Bei $\sigma>0$ ist $U'(\mu+\sigma Z)$ natürlich variabel, genauer gesagt, es fällt mit wachsendem Z. Da aus diesem Grunde allen negativen Ausprägungen von Z ein höheres Gewicht als allen positiven zukommt, ist der Zähler in (59) negativ, der Gesamtausdruck also positiv.

Neben der positiven Steigung läßt sich aber auch eine positive Krümmung der Indifferenzkurven herleiten. Bei $d\mu^2/d\sigma^2|_{U(\mu,\sigma)}>0$ gilt ja für zwei Punkte (μ_1,σ_1) und (μ_2,σ_2), die beide auf einer Indifferenzkurve liegen mögen:

$$\text{(60)} \qquad (\mu_1,\sigma_1)\sim(\mu_2,\sigma_2)\prec\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2},\ \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right).$$

Zudem impliziert eine (strikt) konkave Nutzenkurve für beliebige z die folgende Ungleichung

$$\text{(61)} \qquad \frac{U(\mu_1+z\sigma_1)}{2}+\frac{U(\mu_2+z\sigma_2)}{2}<U\left(\frac{\mu_1+z\sigma_1}{2}+\frac{\mu_2+z\sigma_2}{2}\right).$$

Nach Bildung der Erwartungswerte wird sie zu

$$(62) \qquad \frac{E[U(\mu_1+z\sigma_1)]}{2}+\frac{E[U(\mu_2+Z\sigma_2)]}{2}<E\left[U\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}+\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}Z\right)\right].$$

Soll annahmegemäß $E[U(\mu_1+Z\sigma_1)]=E[U(\mu_2+Z\sigma_2)]$ sein, erhalten wir

$$(63) \qquad E[U(\mu_1+Z\sigma_1)]=E[U(\mu_2+Z\sigma_2)]<E\left[U\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}+\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}Z\right)\right],$$

eine Formulierung, die jener in (60) äquivalent ist und somit die anfangs aufgestellte Behauptung $d^2\mu/d\sigma^2|_{U(\mu,\sigma)}>0$ belegt.

Mit den so gewonnenen Implikationen für den Indifferenzkurvenverlauf werden die Ergebnisse der Punktapproximation bei kleinen Streuungen bestätigt und für den Preis einer Beschränkung auf lineare Verteilungsklassen[33] sogar auf den Fall großer Streuungen sowie um eine Aussage über die Krümmung der Indifferenzkurven erweitert. Auch hier können selbstverständlich alle Präferenzstrukturen, die sich mit Hilfe einer von Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktion schreiben lassen, abgebildet werden.

2.4. *Ergebnis: Das μ-σ-Kriterium in Vertretung des Erwartungsnutzenkriteriums*

Mit den vorangegangenen Überlegungen scheint sich das μ-σ-Kriterium als die gesuchte praktikable Alternative zum Erwartungsnutzenkriterium zu erweisen. Obwohl dieses Kriterium bei der Suche nach Präferenzstrukturen, die sowohl mit Hilfe des Erwartungsnutzenkriteriums als auch mit Hilfe eines der zweiparametrisch-substitutionalen Kriterien exakt darstellbar sind, keineswegs durch eine besonders plausible Schnittmenge von Präferenzstrukturen glänzen konnte, kommt ihm wegen der asymptotisch lexikographischen Ordnung der Momente von Wahrscheinlichkeitsverteilungen eine besondere Stellung zu. Mit μ und σ, die in dieser Ordnung die höchsten Rangstufen bekleiden, können bei genügend kleinen Streuungen der zu bewertenden Verteilungen nahezu beliebige Verläufe der von Neumann-

[33] SCHNEEWEISS (1967a, S. 126–128) und FELDSTEIN (1969) weisen darauf hin, daß die hier abgeleiteten Eigenschaften der Indifferenzkurven nicht für die gesamte Klasse zweiparametrischer Verteilungen, die die linearen Klassen einschließt, gelten. Z. B. können auch logarithmische Normalverteilungen durch μ und σ vollständig charakterisiert werden, obwohl sie keiner linearen Klasse angehören, doch sind die Indifferenzkurven in Verbindung mit einigen Nutzenfunktionen jenseits eines bestimmten σ von unten konkav. Logarithmische Normalverteilungen können bei der multiplikativen Verknüpfung unabhängiger Zufallsvariablen ins Spiel kommen. Vgl. dazu TOBIN (1969).

Morgenstern-Nutzenfunktion abgebildet werden. Darüber hinaus ist das μ-σ-Kriterium analytisch sehr leicht zu handhaben. Daß das μ-σ-Kriterium schließlich, wie es allerdings auch andere zweiparametrische Kriterien könnten, für lineare Verteilungsklassen eine eindeutige Abbildung der Nutzenkurve in ein zweiparametrisches Diagramm liefert, soll nicht unerwähnt bleiben.

Ob nun bei der Lösung von Entscheidungsproblemen dem μ-σ-Kriterium der Vorzug vor der unmittelbaren Verwendung des Erwartungsnutzenkriteriums zu geben ist, muß von Fall zu Fall entschieden werden. Hat das μ-σ-Kriterium keine operationalen Vorteile, wird man immer das Erwartungsnutzenkriterium benutzen. Gibt es aber, wie zu erwarten ist, solche operationalen Vorteile, dann sind für die endgültige Auswahl des Entscheidungskriteriums die folgenden Möglichkeiten zu bedenken:

(1) Das μ-σ-Kriterium ist mit dem Erwartungsnutzenkriterium identisch, weil die Verteilungen, zwischen denen zu wählen ist, einer linearen Klasse angehören.

(2) Das μ-σ-Kriterium approximiert das Erwartungsnutzenkriterium, weil
   a) die Streuungen der zu bewertenden Verteilungen klein sind,
   b) die Verteilungen approximativ einer linearen Klasse angehören (z.B. Normalverteilungen).

(3) Das μ-σ-Kriterium kann nicht verwendet werden, wenn nur stark streuende Verteilungen aus sehr unterschiedlichen Verteilungsklassen vorliegen.

Im Anwendungskapitel V werden wir sehen, daß unter die Möglichkeiten (1) und (2) eine Reihe von interessanten Problemkreisen fällt.

Anhang 1 zu Kapitel II

$$
\begin{aligned}
\sigma^2(V) &= \int [v - E(V)]^2 f(v)dv = \int [a+y-E(a+Y)]^2 f(a+y)\,dy \\
&= \int [y - E(Y)]^2 f(a+y)\,dy \\
&= \int [y^2 - 2yE(Y) + E^2(Y)]\, f(a+y)\,dy \\
&= \int y^2 f(a+y)\,dy - 2E(Y)\int y f(a+y)\,dy + E^2(Y)\int f(a+y)\,dy \\
&= E(Y^2) - E^2(Y) \\
&= \int_{-\infty}^{0} \{[y - E(-\overset{-}{Y})] + E(-\overset{-}{Y})\}^2\, f(a+y)dy \\
&\quad + \int_{0}^{+\infty} \{[y - E(\overset{+}{Y})] + E(\overset{+}{Y})\}^2 f(a+y)dy - E^2(Y) \\
&= \int_{-\infty}^{0} \{[y - E(-\overset{-}{Y})]^2 + 2[y - E(-\overset{-}{Y})]\,E(-\overset{-}{Y}) + E^2(-\overset{-}{Y})\}\, f(a+y)\,dy \\
&\quad + \int_{0}^{+\infty} \{[y - E(\overset{+}{Y})]^2 + 2[y - E(\overset{+}{Y})]\,E(\overset{+}{Y}) + E^2(\overset{+}{Y})\}\, f(a+y)\,dy - E^2(Y)
\end{aligned}
$$

Nun sei $\overset{-}{w} \equiv W(y<0)$ und $\overset{+}{w} \equiv W(y \geq 0)$; dann erhalten wir weiterhin:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2(V) &= \frac{\int_{-\infty}^{0} [y - E(-\overset{-}{Y})]^2 f(a+y)dy}{\overset{-}{w}}\,\overset{-}{w} \\
&\quad + \int_{-\infty}^{0} \{2yE(-\overset{-}{Y}) - 2E^2(-\overset{-}{Y}) + E^2(-\overset{-}{Y})\}\, f(a+y)dy \\
&\quad + \frac{\int_{0}^{+\infty} [y - E(\overset{+}{Y})]^2 f(a+y)dy}{\overset{+}{w}}\,\overset{+}{w} \\
&\quad + \int_{0}^{+\infty} \{2yE(\overset{+}{Y}) - 2E^2(\overset{+}{Y}) + E^2(\overset{+}{Y})\}\, f(a+y)dy - E^2(Y) \\
&= \sigma^2(\overset{-}{Y})\,\overset{-}{w} + 2E(-\overset{-}{Y})\frac{\int_{-\infty}^{0} y f(a+y)dy}{\overset{-}{w}}\,\overset{-}{w} - E^2(-\overset{-}{Y})\int_{-\infty}^{0} f(a+y)dy \\
&\quad + \sigma^2(\overset{+}{Y})\,\overset{+}{w} + 2E(\overset{+}{Y})\frac{\int_{0}^{+\infty} y f(a+y)dy}{\overset{+}{w}}\,\overset{+}{w} - E^2(\overset{+}{Y})\int_{0}^{+\infty} f(a+y)dy - E^2(Y) \\
&= \sigma^2(\overset{-}{Y})\,\overset{-}{w} + 2E(\overset{-}{Y})\,E(\overset{-}{Y})\,\overset{-}{w} - E^2(\overset{-}{Y})\,\overset{-}{w} \\
&\quad + \sigma^2(\overset{+}{Y})\,\overset{+}{w} + 2E(\overset{+}{Y})E(\overset{+}{Y})\overset{+}{w} - E^2(\overset{+}{Y})\overset{+}{w} - E^2(Y) \\
&= \overset{-}{w}\sigma^2(\overset{-}{Y}) + \overset{-}{w}E^2(\overset{-}{Y}) + \overset{+}{w}\sigma^2(\overset{+}{Y}) + \overset{+}{w}E^2(\overset{+}{Y}) - E^2(Y) \\
&= W(y<0)\,\{\sigma^2(\overset{-}{Y}) + E^2(\overset{-}{Y})\} + W(y \geq 0)\,\{\sigma^2(\overset{+}{Y}) + E^2(\overset{+}{Y})\} - E^2(Y). \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}
$$

Anhang 2 zu Kapitel II

Definieren wir

$$w^* \equiv W(V < v^*) = \int_{-\infty}^{v^*} f(v)dv,$$

$$E(V^*) \equiv E(V)\big|_{v<v^*} = \frac{\int_{-\infty}^{v^*} v f(v)dv}{w^*},$$

$$\sigma^2(V^*) \equiv \sigma^2(V)\big|_{v<v^*} = \frac{\int_{-\infty}^{v^*} [v - E(V^*)]^2 f(v)dv}{w^*},$$

dann ist

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{v^*}(V) &= \int_{-\infty}^{v^*} (v-v^*)^2 f(v)dv = \int_{-\infty}^{v^*} (v^2 - 2vv^* + v^{*2}) f(v)dv \\
&= \int_{-\infty}^{v^*} v^2 f(v)dv - 2v^* \frac{\int_{-\infty}^{v^*} v f(v)dv}{w^*} w^* + v^{*2} \int_{-\infty}^{v^*} f(v)dv \\
&= \int_{-\infty}^{v^*} [v - E(V^*) + E(V^*)]^2 f(v)dv - 2v^* E(V^*) w^* + v^{*2} w^* \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{v^*} \{[v - E(V^*)]^2 + 2[v - E(V^*)]E(V^*) + E^2(V^*)\} f(v)dv}{w^*} w^* \\
&\quad - 2v^* E(V^*) w^* + v^{*2} w^* \\
&= \sigma^2(V^*) w^* + \int_{-\infty}^{v^*} [2vE(V^*) - 2E^2(V^*)] f(v)dv + E^2(V^*) w^* \\
&\quad - 2v^* E(V^*) w^* + v^{*2} w^* \\
&= \sigma^2(V^*) w^* + 2E^2(V^*) w^* - 2E^2(V^*) w^* + E^2(V^*) w^* \\
&\quad - 2v^* E(V^*) w^* + v^{*2} w^* \\
&= w^* [\sigma^2(V^*) + E^2(V^*) - 2v^* E(V^*) + v^{*2}] \\
&= W(v < v^*) \{\sigma^2(V^*) + [E(V^*) - v^*]^2\}, \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$