

Ökonomische Entscheidungen bei Ungewißheit

von Hans-Werner Sinn

J. C. B. Mohr (Paul Siebeck): Tübingen 1980

Kapitel 4: Mehrfachrisiken

Viertes Kapitel

Mehrfachrisiken

Bisher wurde die für eine Zeitperiode zu treffende optimale Auswahl eines aus einer Menge einander ausschließender Risikoprojekte untersucht. In diesem Kapitel wird die Fragestellung in zweierlei Hinsicht auf Mehrfachrisiken erweitert. Zum einen erörtern wir die Möglichkeit, daß die Risikoprojekte, von denen bisher die Rede war, aus der Summierung von Einkommen aus mehreren einander *nicht* ausschließenden, *gleichzeitig* durchzuführenden Einzelprojekten stammt, und zum anderen begeben wir uns, wie eingangs versprochen, in die Mehrperiodenanalyse *wiederholter* Risikosituationen. Würde im zweiten Fall bereits zum Beginn einer ganzen Sequenz wiederholter Projekte die optimale Wahl fixiert¹, dann würde er sich bis auf das Zinsproblem nicht vom ersten unterscheiden; doch wenn realistischerweise angenommen wird, daß die Entscheidung zu Beginn einer jeden Periode in Kenntnis der Ergebnisse aller vorangegangenen Risikoprojekte von neuem zu treffen ist, haben wir eine Entscheidungssituation neuer Art, die einer gesonderten Analyse bedarf. Im übrigen läßt sich ja bei der Mehrperiodenanalyse das im ersten Kapitel bereits angesprochene Problem der simultanen Optimierung der Konsumententscheidung nicht länger ausklammern.

Unser Augenmerk wird sich bei den nachfolgenden Überlegungen insbesondere auf die Frage richten, ob sich Entscheidungskriterien finden lassen, die eine isolierte Bewertung von Einzelrisiken erlauben, ohne daß man bei der Auswahl eines Projektes jeweils alle anderen Wahlentscheidungen mitbedenken müßte. Das in der historischen Diskussion wichtigste Beispiel für eine solche Regel liegt darin, das erwartete Einkommen des Einzelprojektes als Präferenzfunktional zu wählen. Sie wird durch das im Fall der Mehrfachrisiken ins Spiel kommende Gesetz der großen Zahlen begründet, aufgrund dessen der Risikoaspekt des Problems zu verschwinden neigt. Doch gibt es bei mehreren gleichzeitig durchgeführten wie bei wiederholten Risiken auch andere Regeln, die wir kennenlernen werden.

¹ Diese Annahme machen KRELL (1969, S. 95–97 u. 100; 1968, S. 172–174) und SCHNEFWEISS (1967a, S. 173–183 u. 1968) bei der Analyse wiederholter Risiken explizit.

Abschnitt A Gleichzeitige Risiken

1. *Das Gesetz der großen Zahlen als Begründung des Mittelwertkriteriums*
Das *Gesetz der großen Zahlen*, das nach seinem Urheber auch *Bernoullis Theorem*¹ genannt wird, besagt, daß bei mehrfacher Durchführung eines gegebenen Glücksspiels der durchschnittliche Spielgewinn stochastisch gegen den erwarteten Gewinn des einzelnen Spiels konvergiert, wenn die Zahl der Ausspielungen $\rightarrow \infty$ geht. Mit Hilfe der uns schon bekannten, hier jedoch etwas anders formulierten Tschebyscheffschen Ungleichung²

$$(1) \quad W[|\Theta - E(\Theta)| \geq \alpha] \leq \left(\frac{\sigma(\Theta)}{\alpha}\right)^2, \alpha > 0,$$

(Θ ist eine beliebige Zufallsvariable mit endlicher Varianz und α eine beliebige Zahl > 0) kommt man für ein m -fach durchgeführtes Spiel mit dem (juristischen) Zufallsgewinn $X_i, i = 1, \dots, m$, wegen

$$E\left(\frac{\sum X_i}{m}\right) = E(X_i) \equiv E(X) \quad \forall i$$

und³

$$\sigma^2\left(\frac{\sum X_i}{m}\right) = \frac{1}{m^2} \sigma^2(\sum X_i) = \frac{\sigma^2(X_i)}{m} \equiv \frac{\sigma^2(X)}{m} \quad \forall i$$

zu dem Ausdruck

$$(2) \quad W\left(\left|\frac{\sum X_i}{m} - E(X)\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{m} \left(\frac{\sigma(X)}{\alpha}\right)^2,$$

aus dem durch Grenzwertbildung das Gesetz der großen Zahlen folgt:

$$(3) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} W\left(\left|\frac{\sum X_i}{m} - E(X)\right| \geq \alpha\right) = 0.$$

Dies ist die übliche Formulierung.

¹ Jakob Bernoulli, 1654–1705, Onkel des Daniel Bernoulli. Eine Darstellung der ursprünglichen Fassung findet man bei TODHUNTER (1865, S. 71–73).

² Vgl. Gleichung (II B 3). Daß hier auf eine Wahrscheinlichkeitsobergrenze abgestellt wird, bedeutet für die unten folgende Formel (17) den Vorteil einer schärferen Formulierung.

³ Es wird Unabhängigkeit der einzelnen Spiele vorausgesetzt. Für die allgemeine Formel einer Summenvarianz siehe unten, Fn. 4.

Eine andere, die für unsere Zwecke noch plastischer wirkt, ergibt sich, wenn man einmal zwei Spiele mit den stochastischen Gewinnauszahlungen X und X' vergleicht, die beide m -fach durchgeführt werden sollen und die so gewählt sind, daß $E(X) > E(X')$. Setzt man $\Theta = \Sigma(X_i - X'_i)$ und $\alpha = E[\Sigma(X_i - X'_i)] (> 0)$, dann wird die Tschebyscheffsche Ungleichung (1) zu

$$(4) \quad W\{|\Sigma(X_i - X'_i) - E[\Sigma(X_i - X'_i)]| \geq E[\Sigma(X_i - X'_i)]\} \\ \leq \left[\frac{\sigma[\Sigma(X_i - X'_i)]}{E[\Sigma(X_i - X'_i)]} \right]^2.$$

A fortiori gilt dann

$$(5) \quad W\{-[\Sigma(X_i - X'_i) - E[\Sigma(X_i - X'_i)]] \geq E[\Sigma(X_i - X'_i)]\} \\ \leq \left[\frac{\sigma[\Sigma(X_i - X'_i)]}{E[\Sigma(X_i - X'_i)]} \right]^2,$$

woraus, was die rechte Seite betrifft, bei Unabhängigkeit zwischen X_i und X_j bzw. X'_i und X'_j , $i \neq j$, wegen

$$\sigma^2[\Sigma(X_i - X'_i)] = m\sigma^2(X - X') \quad \text{und} \\ E[\Sigma(X_i - X'_i)] = mE(X - X')$$

der Ausdruck

$$(6) \quad W(\Sigma X_i \leq \Sigma X'_i) \leq \frac{1}{m} \left[\frac{\sigma(X - X')}{E(X - X')} \right]^2$$

und sein Grenzwert

$$(7) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} W(\Sigma X_i \leq \Sigma X'_i) = 0$$

folgen. Da nach Voraussetzung $E(X) > E(X')$, besagt (7), daß von zwei Spielen mit unterschiedlichen Erwartungsgewinnen jenes mit dem größeren Erwartungsgewinn mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit die größere Gewinnsumme erbringt, wenn die Zahl der Ausspielungen $\rightarrow \infty$ wächst.

Aus dieser Formulierung scheint sich unabhängig von irgendwelchen individuellen Präferenzen unmittelbar der Erwartungswert als Präferenzfunktional anzubieten, wenn die Voraussetzungen, die gemacht wurden, in der wirklichen Entscheidungssituation wenigstens annähernd erfüllt sind. Daß dies bei praktischen Problemen jemals der Fall sei, kann man natürlich

bezweifeln. Die am krassesten verletzte Bedingung ist in der Regel die Grundvoraussetzung der großen Zahlen. Aber abgesehen davon, gibt es einen Effekt, der selbst bei unendlich vielen Ausspielungen das Gesetz der großen Zahlen durchkreuzen könnte. Ihm ist der nächste Abschnitt gewidmet.

2. Die Korrelation der Risiken

Eine in der Praxis häufig nicht anzutreffende Voraussetzung des Gesetzes der großen Zahlen ist die Unabhängigkeit der einzelnen Ausspielungen. Welche Auswirkung die Berücksichtigung von Abhängigkeiten auf das Gesetz der großen Zahlen hat, sei an Hand eines leicht auf viele andere Fragestellungen übertragbaren Beispiels aus dem Versicherungsbereich erläutert.

Unternehmen H versichere den Hausrat, Unternehmen K Kraftfahrzeuge. In beiden Sparten gebe es nur völlig homogene Risiken, und bei jeweils gegebener Prämie sei der Versicherungsbestand beider Unternehmen beliebig auszuweiten, so daß der Erwartungsgewinn $E(X_H)$ bzw. $E(X_K)$ aus einem einzelnen Vertrag bei beiden Unternehmen unabhängig von der Bestandsgröße ist. Es gelte $E(X_K) > E(X_H)$. Wird unter dieser Voraussetzung K mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit besser als H abschneiden, wenn beide ihre Bestände im Gleichschritt ausweiten?

Nach dem Gesetz der großen Zahlen bei Unabhängigkeit ist dies der Fall, was man sieht, wenn man in obiger Formel (7) $X_i \equiv X_i^K$ und $X'_i \equiv X_i^H$ substituiert und m als Maß für die Bestandsgröße nimmt. Nicht so bei Korrelation der Risiken. Die oben mögliche Umformung der rechten Seite von (5), die zu (6) führt, ist nun in dieser Form nicht mehr möglich. Statt (6) erhält man jetzt nur die allgemeinere Form

$$(8) \quad W[\Sigma X_i^K \leq \Sigma X_i^H] \leq \frac{\sum_i \sum_j \rho_{ij} \sigma(X_i^K - X_i^H) \sigma(X_j^K - X_j^H)}{[mE(X^K - X^H)]^2}$$

mit⁴

$$(9) \quad \rho_{ij} \equiv \frac{\text{cov}(X_i^K - X_i^H, X_j^K - X_j^H)}{\sigma(X_i^K - X_i^H) \sigma(X_j^K - X_j^H)}, \quad \rho_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = j.$$

⁴ Die Kovarianz zweier Zufallsvariablen A und B , $\text{cov}(A, B) \equiv E\{[A - E(A)][B - E(B)]\}$, ist ein Maß für die Stärke des linearen Zusammenhangs zwischen den Variablen. Sind A und B stochastisch unabhängig voneinander, ist $\text{cov}(A, B) = 0$. Für die Varianz einer Summe von Zufallsvariablen Z_i gilt allgemein

$$\begin{aligned} \sigma^2[\Sigma(Z_i)] &= \sum_i \sum_j \text{cov}(Z_i, Z_j) \quad \text{mit} \quad \text{cov}(Z_i, Z_i) = \sigma^2(Z_i) \\ &= \sum_i \sum_j \frac{\text{cov}(Z_i, Z_j)}{\sigma(Z_i) \sigma(Z_j)} \sigma(Z_i) \sigma(Z_j) = \sum_i \sum_j \rho_{ij} \sigma(Z_i) \sigma(Z_j). \end{aligned}$$

Vgl. Fn. 15.

ρ_{ij} ist hier der Korrelationskoeffizient zwischen der Differenz der Gewinne aus dem i -ten K - und H -Vertrag und der Differenz der Gewinne aus dem jeweils j -ten K - und H -Vertrag. Glücklicherweise kann man ihn auf drei andere, leichter interpretierbare Korrelationskoeffizienten zurückführen. Nämlich auf ρ_{KK} für die Korrelation zwischen⁵ den Schäden zweier beliebiger (jedoch unterschiedlicher) K -Verträge, auf einen analog definierten Koeffizienten ρ_{HH} und auf ρ_{KH} , der die Schadenkorrelation zwischen einem beliebigen K - und einem beliebigen H -Vertrag mißt.

Bei

$$\sigma^2(X_i^N) = \sigma^2(X_j^N) \quad \text{und} \quad E(X_i^N) = E(X_j^N) \quad \forall i, j, (N = K, H)$$

kann man (9) dann zu

$$(10) \quad \rho_{ij} = \frac{\rho_{KK} \sigma^2(X^K) + \rho_{HH} \sigma^2(X^H) + 2\rho_{KH} \sigma(X^K) \sigma(X^H)}{\sigma^2(X^K) + \sigma^2(X^H) + 2\rho_{KH} \sigma(X^K) \sigma(X^H)}, \quad i \neq j,$$

umformen, was durch Zerlegung von (10) und (9) mit Hilfe der Erwartungs- algebra leicht überprüfbar ist. Da $\rho_{ij} \equiv \rho = \text{const.}$, wenn $i \neq j$, kann (8) unter Berücksichtigung der Gleichung $\sigma(X_i^K - X_i^H) = \sigma(X_j^K - X_j^H)$ als

$$(11) \quad W[\Sigma X_i^K \leq \Sigma X_i^H] \leq \frac{m + \rho(m^2 - m)}{m^2} \left[\frac{\sigma(X^K - X^H)}{E(X^K - X^H)} \right]^2$$

geschrieben werden (unnötige Indizes wurden fortgelassen), und als obere Grenze der Wahrscheinlichkeit, daß der nach dem Erwartungsgewinn besser gestellte Kraftverkehrsversicherer trotz eines beliebig hohen Bestandes doch schlechter als der Hausratversicherer abschneidet, haben wir

$$(12) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} W[\Sigma X_i^K \leq \Sigma X_i^H] \leq \rho \left[\frac{\sigma(X^K - X^H)}{E(X^K - X^H)} \right]^2,$$

also beileibe nicht den Wert Null.

Bei Zufallsvariablen, die in der beschriebenen Weise korreliert sind, ist das Gesetz der großen Zahlen also nicht mehr nachweisbar. Der Grund liegt darin, daß ein Streuungsausgleich sich nur auf die durch Regressionsbeziehungen nicht erklärbaren Varianzanteile bezieht. Die Streuungswirkung eines alle Auspielungen beeinflussenden Faktors, den man sich zur Erklä-

⁵ Die Korrelation der Schäden ist der der Gewinne gleich, wenn, wie unterstellt, der Erlös und alle Nicht-Schadenskosten deterministisch sind. Auf den Nachweis wird hier verzichtet.

rung der Korrelation vorstellen mag, kann durch Spielwiederholungen nicht eliminiert werden⁶.

3. *Das Webersche Relativitätsgesetz als die ökonomisch richtige Begründung des Mittelwertkriteriums bei großen Zahlen*

Die bislang geäußerten Zweifel an der praktischen Bedeutung des Gesetzes der großen Zahlen setzen bei seinen möglicherweise unrealistischen Voraussetzungen an, stellen es aber nicht grundsätzlich in Frage. Ganz fundamental bezweifelt demgegenüber SCHNEEWEISS (1967a, S. 173–183 und 1968)⁷, daß das Gesetz für eine Begründung des Gewinnerwartungswertes als Präferenzfunktional herhalten könnte, selbst wenn all seine Voraussetzungen erfüllt sein sollten. Die Wahrscheinlichkeit, bei der vielfachen Durchführung eines Projektes besser als bei der eines anderen Projektes abzuschneiden, gebe nämlich keinesfalls einen Hinweis darauf, welcher Gewinnsammenverteilung der höhere Erwartungsnutzen zuzuordnen sei. Z. B. könne ja das mit hoher Wahrscheinlichkeit bessere Projekt für den Fall, daß es sich tatsächlich als besser erweist, nur einen geringfügigen Nutzensvorsprung erzielen, jedoch im anderen Fall, nämlich dem, daß es wider Erwarten schlechter abschneidet, gleich einen um soviel niedrigeren Nutzenwert aufweisen, daß es trotz der Gültigkeit des Gesetzes der großen Zahlen den kleineren Erwartungsnutzen habe.

Schneeweiß gibt auch für die Klasse der Normalverteilungen eine Nutzenfunktion an, für die, wie er sagt, das „ μ -Kriterium im Wiederholensfall“ nicht gilt. Es ist die oben⁸ kritisierte Funktion der vermögensunabhängigen Risikoaversion $U(v) = -e^{-\alpha v}$.

Selbst wenn man die Vermögensunabhängigkeit der Risikoaversion für realistisch hält, so ist die genannte Funktion dennoch nicht durchgängig anwendbar, weil die Normalverteilung natürlich nur auf juristische Vermögen abstellt und daher die Maehkminn-Regel⁹ ins Spiel kommt, so daß

⁶ Das hat man Knight (z. B. NIEHANS (1948)) entgegengehalten, der unter Berufung auf das Gesetz der großen Zahlen behauptet hatte, daß ökonomische Risiken grundsätzlich durch die Zusammenfassung zu großen Gruppen beseitigt werden. Siehe KNIGHT (1921, Kap. VIII, bes. S. 213 u. 238f.).

⁷ Diese Kritik geht auf SAMUELSON (1963) zurück, der folgendes Theorem beweist (S. 111): "If at each income or wealth level within a range, the expected utility of a certain investment or bet is worse than abstention, then no sequence of such independent ventures (that leaves one within the specified range of income) can have a favorable expected utility." Damit nimmt Samuelson indirekt Bezug auf die Funktion $-e^{-\alpha v}$ für vermögensunabhängige Risikoaversion, um deren Implikationen es im Text geht.

⁸ Vgl. S. 169ff.

⁹ Vgl. Kap. III B.

$U(v) = U(0)$, wenn $v \leq 0$. Doch, wenn man sich auf Projekte mit $E(X) > 0$ beschränkt, so daß bei fortwährender Wiederholung der Variationskoeffizient der Endvermögensverteilung mit

$$(13) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sigma(aq + \sum_{i=1}^m X_i)}{E(aq + \sum_{i=1}^m X_i)} = \frac{\sqrt{m} \sigma(X)}{aq + mE(X)} = 0$$

($aq \equiv$ aufgezinstes Anfangsvermögen)

gegen Null geht, dann strebt bei beliebigen Verteilungen auch die Wahrscheinlichkeit für negative juristische Vermögen gegen null (Tschebyscheff) und bringt so den Beitrag des abgeänderten Teils der Nutzenfunktion, die ja überall endliche Werte annimmt, zum Verschwinden¹⁰. So folgt, da SCHNEEWEISS gerade an der Grenzbetrachtung $m \rightarrow \infty$ interessiert ist, daß man unter der genannten Bedingung $E(X) > 0$ bereits von vornherein mit der Funktion $U(v) = -e^{-\alpha v}$ arbeiten darf. Das wollen wir jetzt auch tun, wenn wir uns die Argumentation vor Augen führen, die SCHNEEWEISS (1967a, S. 178) (in etwas anderer Form) zum Nachweis des Paradoxons anbringt.

Nach dem Ansatz von FREUND (1956) erreicht man bei Normalverteilungen mit der Dichte¹¹

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(v-\mu)/\sigma]^2}$$

und der Nutzenfunktion $U(v) = -e^{-\alpha v}$ das Ziel der Maximierung des Erwartungswertes

$$(14) \quad \max \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(v-\mu)/\sigma]^2} (-e^{-\alpha v}) dv$$

woraus nach einigen Umformungen

$$(15) \quad \max \left\{ -e^{\alpha^2 \sigma^2 / 2 - \alpha \mu} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(v-\mu+\alpha\sigma^2)/\sigma]^2} \right\} dv$$

wird, durch

$$(16) \quad \max \left(\mu - \frac{\alpha}{2} \sigma^2 \right),$$

¹⁰ SCHNEEWEISS (1967a, S. 182) zeigt dies für Normalverteilungen, indem er nahezu beliebige Änderungen der Nutzenfunktion über der negativen Halbachse zuläßt.

¹¹ Vgl. Fn. 22, S. 65.

weil $\alpha = \text{const.}$ und das Integral in (15) unabhängig von μ und σ den konstanten Wert 1 annimmt. Weisen alle Einzelprojekte normalverteilte Gewinne X_i auf, so ist wegen der Reproduktionseigenschaft der Normalverteilung auch die Summe normal verteilt. Die Erfüllung der Forderung

$$(17) \quad \max \left\{ E(aq + \sum_{i=1}^m X_i) - \frac{\alpha}{2} \sigma^2(aq + \sum_{i=1}^m X_i) \right\},$$

die wegen $a = \text{const.}$ und Unabhängigkeit der X_i zur Forderung

$$(18) \quad \max \sum_{i=1}^m [E(X_i) - \frac{\alpha}{2} \sigma^2(X_i)]$$

$$(19) \quad = \sum_{i=1}^m \max [E(X_i) - \frac{\alpha}{2} \sigma^2(X_i)]$$

äquivalent ist, sichert dann die Maximierung des Erwartungsnutzens. Erstaunlicherweise zeigt (19), daß das beste Projekt unabhängig von der Häufigkeit seiner Durchführung ermittelt werden kann. Damit haben wir tatsächlich eine isolierte Entscheidungsregel, deren Suche wir uns eingangs vorgenommen hatten. Die Regel widerspricht paradoxerweise¹² dem reinen Erwartungswertkriterium $\max E(X_i)$ selbst dann, wenn die Zahl der Durchführungen gegen ∞ geht, so daß nach dem Gesetz der großen Zahlen jenes Projekt, das den höchsten Erwartungswert aufweist, mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit eine höhere Gewinnsumme als jedes andere Projekt erzielt, also auch eine höhere Gewinnsumme als das Projekt mit dem höchsten Wert für $E(X) - \alpha/2\sigma^2(X)$.

Leider ist die Relevanz dieses Ergebnisses unnötig eingeschränkt, da für die X_i die Normalverteilungsannahme gemacht wurde¹³. Das Ergebnis läßt sich jedoch auch ohne die Annahme einer speziellen Verteilungsklasse halten¹⁴. Einzig die Endlichkeit des Erwartungsnutzens muß sichergestellt sein, was bei jeder realistischweise links beschränkten Verteilung mit

¹² In Wahrheit handelt es sich natürlich nur um ein scheinbares Paradoxon.

¹³ SCHNEEWEISS (1968c, S.100) erweitert zwar den ursprünglich (1967a, S.176f.) nur für Normalverteilungen erbrachten Nachweis eines allgemeinen Kriteriums an Hand dessen eine Nutzenfunktion daraufhin überprüft werden kann, ob das „ μ -Kriterium im Wiederholensfall“ gilt, auf den Fall beliebiger Verteilungen. Bei der Überprüfung der Funktion $-e^{-x}$ wird die Normalverteilungsannahme dann aber doch beibehalten.

¹⁴ Mit einer ähnlichen Argumentation, wie sie SAMUELSON (1971) gegen das wachstumsoptimale Portefeuillemodell Latané's vorgebracht hat.

existierendem 1. Moment der Fall ist. Nach dem Erwartungsnutzenprinzip erkennt man das bei m -facher Durchführung beste Projekt daran, daß es die Forderung

$$(20) \quad \max E \left[U \left(aq + \sum_{i=1}^m X_i \right) \right],$$

also bei $U(v) = -e^{-\alpha v}$ die Forderung

$$(21) \quad \max E \left[-e^{-\alpha(aq + \sum_{i=1}^m X_i)} \right]$$

erfüllt. Diese Forderung ist äquivalent zu

$$(22) \quad \max E \left[- \prod_{i=1}^m e^{-\alpha X_i} \right],$$

was sich bei der unterstellten Unabhängigkeit der einzelnen Ausspielungsergebnisse X_i auch als

$$(23) \quad \max \prod_{i=1}^m E(-e^{-\alpha X_i}) = \prod_{i=1}^m \max E(-e^{-\alpha X_i})$$

schreiben läßt¹⁵. Der letzte Ausdruck bestätigt das obige Ergebnis nun auch für (nahezu) beliebige Verteilungsklassen: Bei vermögensunabhängiger Risikoaversion kann an Hand des Erwartungsnutzens der Gewinnverteilungen der einzelnen Projekte ein unabhängig von der Zahl der Durchführungen bestes Projekt bestimmt werden.

Es muß betont werden, daß die von uns benötigten Annahmen tatsächlich allgemeiner als jene von Schneeweiß sind, wenngleich letzterer (1967a, S. 174) explizit einen anderen Anspruch erhebt. Schneeweiß argumentiert, das Verteilungsgesetz der Gewinne der Einzelprojekte dürfe sein, wie es wolle¹⁶, denn bei häufiger Wiederholung konvergiere die Summenverteilung ohnehin gegen eine Normalverteilung, was dann eine Kalkulation nach der Art der Gleichungen (14)–(19) ermöglichen würde. Daß nach dem zentralen Grenzwertsatz die *standardisierte* Form der Summenverteilung gegen eine

¹⁵ Es gilt allgemein, daß

$$\begin{aligned} \text{cov}(Z, X) &= E \{ [Z - E(Z)] [X - E(X)] \} \\ &= E(ZX) - E[Z E(X)] - E[X E(Z)] + E[E(Z) E(X)] \\ &= E(ZX) - E(Z) E(X). \end{aligned}$$

Bei Unabhängigkeit ist $\text{cov}(Z, X) = 0$ und folglich $E(ZX) = E(X) E(Z)$, was eine schrittweise Überführung von (22) in (23) gestattet, da Unabhängigkeit zwischen X_i und X_j natürlich auch Unabhängigkeit zwischen $e^{-\alpha X_i}$ und $e^{-\alpha X_j}$, $i \neq j$, bedeutet.

¹⁶ Die Endlichkeit des Erwartungswertes wird allerdings vorausgesetzt.

Standardnormalverteilung konvergiert, ist natürlich richtig, doch folgt hieraus tatsächlich, wie es nötig wäre, daß auch der Erwartungsnutzen der Summenverteilung gegen jenen einer Normalverteilung mit gleicher Streuung und gleichem Mittelwert konvergiert? Der Nachweis wurde nicht erbracht und ist auch gar nicht zu erbringen, denn wäre die von Schneeweiß implizit aufgestellte Behauptung richtig, daß für (weitgehend) beliebige Verteilungsklassen die Ansätze (17) und (20) zur selben Projektwahl führten, also

$$(24) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \max \left\{ E \left(aq + \sum_{i=1}^m X_i \right) - \frac{\alpha}{2} \sigma^2 \left(aq + \sum_{i=1}^m X_i \right) \right\} \\ \sim \lim_{m \rightarrow \infty} \max E \left[U \left(aq + \sum_{i=1}^m X_i \right) \right],$$

dann müßte, wie ein Vergleich von (19) mit (23) zeigt, auch folgende Äquivalenz auf der Ebene der Einzelprojekte gelten:

$$(25) \quad \max \left[E(X_i) - \frac{\alpha}{2} \sigma^2(X_i) \right] \sim \max E(-e^{-\alpha X_i}) \quad \forall i.$$

Das aber ist, wie es von SCHNEEWEISS (1967a, S. 89–98 u. S. 146–148) übrigens selbst gezeigt wurde¹⁷, nicht für allgemeine Verteilungsklassen, sondern nur für Normalverteilungen der Fall. Um die restriktive Annahme, daß die Gewinnverteilung der Einzelprojekte normal zu sein hat, kommt man bei der von Schneeweiß benutzten Argumentation also nicht herum.

Festzuhalten ist nun, daß bei vermögensunabhängiger Risikoaversion ein Mittelwertkriterium bei Mehrfachrisiken nicht zu rechtfertigen ist¹⁸. Konfrontiert mit den in der Praxis beobachtbaren Entscheidungen der Wirtschaftssubjekte wird dieses Ergebnis aber zu Recht als unbefriedigend empfunden, so „rational“ es auch immer sein mag und so „vernünftig“ die Nutzenfunktion $-e^{-\alpha x}$ nach Meinung von SCHNEEWEISS (1967a, S. 175) ist. KRELLE (1968, Fn. S. 174) sucht eine Korrektur des unplausiblen Ergebnisses durch ein Abschneiden der Schwänze der Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu erreichen, das er mit der häufig beobachtbaren Vernachlässigung kleiner Wahrscheinlichkeiten rechtfertigt. Dieses Vorgehen hat aber einen *ad-hoc*-Charakter und ist aus normativer Sicht nicht zu rechtfertigen¹⁹.

¹⁷ Vgl. die Diskussion um die Rationalität des μ - σ -Prinzips im Abschnitt II D 2.1.5.

¹⁸ Jedenfalls solange überhaupt wirkliche Risikofurcht vorhanden ist. Bei einer linearen Nutzenfunktion liegt natürlich eine vermögensunabhängige Risikoneutralität vor, die ohnehin das Mittelwertkriterium verlangt.

¹⁹ KRELLE (1961, S. 588) hielt die Verfolgung des Mittelwertkriteriums noch für „ein zwingendes Gebot der Rationalität“. Bei KRELLE (1968) findet sich aber kein entsprechender Hinweis. Dort geht es offenbar nur um eine positive Beschreibung des Risikoverhaltens.

Auf ganz natürliche Weise läßt sich das Paradoxon lösen, wenn wir realistischerweise Präferenzstrukturen nach dem Weberschen Gesetz unterstellen²⁰. Das nach dem Ergebnis des Kapitels III²¹ hierbei anzutreffende Indifferenzkurvensystem impliziert eine Funktion für das Sicherheitsäquivalent von der Art

$$(26) \quad S(V) = \Omega\left(\frac{\sigma(V)}{E(V)}, Z\right) E(V)$$

mit Z als einer Beschreibung der standardisierten Verteilungsklasse, der V angehört, und

$$(27) \quad \lim_{b \rightarrow 0} \Omega(b, Z) = 1,$$

$$(28) \quad \Omega(b, Z) < 1, \quad \text{wenn } b > 0,$$

vorausgesetzt, daß mindestens eine der beiden folgenden Konstellationen vorliegt:

$$(a) \quad v > 0, \quad 0 < \varepsilon < \infty,$$

$$(b) \quad \left. \begin{array}{l} -\infty \leq v \leq +\infty, \\ \frac{\sigma(V)}{E(V)} \text{ ist klein,} \\ \text{die Dichte konvergiert bei } v \rightarrow -\infty \text{ mindestens} \\ \text{so schnell wie bei einer Normalverteilung,} \end{array} \right\} 0 < \varepsilon < 1.$$

Dabei mißt ε wie gewohnt die Risikoaversion und $E(V) < \infty$ wird als selbstverständlich unterstellt.

Das beste Projekt findet man unter diesen Bedingungen nach der Maxime

$$(29) \quad \max S(V) = \max \left\{ \Omega \left[\frac{\sigma(aq + \sum_{i=1}^m X_i)}{E(aq + \sum_{i=1}^m X_i)}, Z \right] E(aq + \sum_{i=1}^m X_i) \right\}$$

$$= \max \left\{ \Omega \left[\frac{\sqrt{m} \sigma(X)}{aq + mE(X)}, Z \right] [aq + mE(X)] \right\},$$

²⁰ Immer noch unter der jetzt freilich nicht mehr restriktiven Normalverteilungsannahme kommt auch SCHNEIWEISS (1967a, S. 179–181) für die sich aus dem Weberschen Gesetz ergebenden Nutzenfunktionen zu einer Lösung. Im Fall $\varepsilon \neq 1$ benötigt er für sein Ergebnis allerdings Versionen, die bereits auf der positiven Halbachse

die wegen $\lim_{m \rightarrow \infty} \Omega(\cdot, Z) = 1 = \text{const.}$ zum Mittelwertkriterium führt:

$$(30) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \max S(V) \sim \max E(X).$$

Es sei angemerkt, daß dieses Ergebnis gilt, obwohl sich natürlich beim Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ die standardisierte Verteilungsklasse Z laufend ändert. Da der Grenzwert (27) von Z unabhängig ist, bleibt diese Änderung nämlich ohne Einfluß. Im übrigen könnten wir ja unter freilich restriktiveren Bedingungen auf die Punktapproximation zurückgreifen, wobei Ω ohnehin nicht von Z abhängig wäre.

Um (30) richtig zu interpretieren, sollte man sich die Implikationen der Bedingungen (a) und (b) für die Einzelprojekte vor Augen führen: Bedingung (a) wird bei $m \rightarrow \infty$ nur dann erfüllt, wenn auch $x > 0$, und Bedingung (b) wird wegen $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma(V)/E(V) = 0$ z.B. schon dann erfüllt, wenn $-\infty < \underline{x} < x < \bar{x} < +\infty$, denn in diesem Fall ist die Summenverteilung für endliche m beschränkt und geht für $m \rightarrow \infty$ gegen eine Normalverteilung, so daß die Konvergenzbedingung immer gesichert ist; aber natürlich dürfte auch schon X normalverteilt sein. Zu beachten ist, daß das Mittelwertkriterium nicht gilt, wenn x negativ werden kann und $\varepsilon \geq 1$. In diesem Fall kann, wie groß das Anfangsvermögen auch immer sein mag, für genügend große m auch v negativ werden, so daß die lexikographische Vermögensgrenze bei $v=0$ die Maximierung der (stets strikt positiven) „Überlebenswahrscheinlichkeit“ erfordert.

Wenngleich damit das Mittelwertkriterium von der Erwartungsnutzentheorie her seine entscheidungstheoretisch richtige Begründung erhalten hat, bleiben natürlich die oben gegen das Gesetz der großen Zahlen angeführten Argumente bezüglich der Korrelation der Risiken und der in der Praxis regelmäßig „kleinen Zahlen“ voll wirksam, denn beide laufen ja darauf hinaus, daß der Variationskoeffizient des Vermögens praktisch nicht in die Nähe des Wertes 0 kommt, so daß er bei der Auswahl zwischen verschiedenen Projekten Berücksichtigung finden muß. Bezüglich der kleinen Zahlen bedarf es wohl keiner Erläuterung. Was die Korrelationswirkung betrifft, mache man sich klar, daß

$$(31) \quad \frac{\sigma(V)}{E(V)} = \frac{\sigma(aq + \sum X_i)}{E(aq + \sum X_i)} = \frac{\sqrt{\sum_i \sum_j \rho_{ij} \sigma(X_i) \sigma(X_j)}}{aq + \sum E(X_i)},$$

woraus bei $\rho_{ij} = 1$ und $\rho_{ij} \equiv \rho = \text{const.}, i \neq j$, ähnlich wie in (11) das Ergebnis

durch Substitution geeigneter anderer Funktionen modifiziert wurden und in dieser Form nicht mit unserer Präferenzhypothese kompatibel sind.

²¹ Vgl. Kap. III A 2.2, A 2.3, B 1.2 und B 2.

$$\begin{aligned}
 (32) \quad \frac{\sigma(V)}{E(V)} &= \frac{\sqrt{m + (m^2 - m)\sigma^2(X)}}{aq + mE(X)} \\
 &= \frac{\sqrt{1/m + \rho(1 - 1/m)\sigma^2(X)}}{\frac{aq}{m} + E(X)} \\
 \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sigma(V)}{E(V)} &= \sqrt{\rho} \frac{\sigma(X)}{E(X)}
 \end{aligned}$$

folgt.

4. Ergebnis

Nach dem Gesetz der großen Zahlen erbringt von zwei Risikoprojekten mit unterschiedlicher Gewinnerwartung bei genügend häufiger Durchführung dasjenige mit dem höheren Erwartungsgewinn mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit die größere Gewinnsumme und damit auch den höheren Nutzen *ex post*, welchem Verteilungsgesetz die Gewinne der Einzelprojekte auch immer gehorchen mögen. So hat es den Anschein, als müsse unabhängig von irgendwelchen subjektiven Präferenzen die Gewinnerwartung als Präferenzfunktional fungieren. Der Anschein trügt auch nicht, allein seine Begründung ist falsch. Das Projekt, das mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit den höheren Nutzen stiftet, braucht nämlich nicht zugleich den höheren Erwartungsnutzen *ex ante* zu besitzen; ob beide Vorzüge zusammenfallen, ist eine Frage der Risikopräferenzfunktion. So ist es unabhängig vom Verteilungsgesetz der Gewinne der Einzelprojekte bei der durch $U(v) = -e^{-\alpha v}$ beschriebenen Präferenzstruktur der vermögensunabhängigen Risikoaversion für die Frage der Vorteilhaftigkeit der Einzelprojekte völlig irrelevant, wie häufig sie durchgeführt werden; das Gesetz der großen Zahlen ist in diesem Fall ausgeschaltet. Gleichwohl wird es durch die einzig realistischen, aus dem Weberschen Gesetz folgenden Präferenzstrukturen teilweise rehabilitiert: Für strikt positive Gewinnverteilungen und/oder mäßige Risikoaversion ($\varepsilon < 1$) verspricht die genügend häufige Durchführung des Projektes mit dem höchsten Erwartungsgewinn auch den höchsten Erwartungsnutzen. Damit fallen die beiden genannten Vorzüge wieder zusammen. Für auch in den negativen Bereich hinstreuende Gewinnverteilungen bleibt das Gesetz der großen Zahlen jedoch wirkungslos, wenn nur die Risikoaversion stark genug ist ($\varepsilon \geq 1$).

Selbst wenn das Gesetz der großen Zahlen nach diesen Überlegungen zum Zuge käme, dann gibt es in der Praxis neben dem offenkundigen Problem der in Wirklichkeit „kleinen Zahlen“ freilich immer noch jenes der Korrelation der Risiken, so daß es für einen Entscheidungsträger in den seltensten Fällen ratsam sein dürfte, sich nach dem Mittelwertkriterium zu richten.

Abschnitt B

Wiederholte Risiken

Mit der Analyse wiederholter Risiken gewinnt die Risikopräferenztheorie die Zeit als neue Dimension. Trotz der schon früh vorgelegten Arbeiten von BÖHM-BAWERKS (1884, 1888) und FISHERS (1906, 1930) hat sich die ökonomische Theorie ganz generell mit dieser Dimension lange Zeit nicht anfreunden können, und auch heute noch gibt es Bereiche wie z.B. die allgemeine Gleichgewichtstheorie, wo sie nur zögernd Eingang findet.

Die Vernachlässigung der Zeit ist nicht unbedingt ein Fehler. Immerhin läßt sich bei manchen Menschen ein kurzsichtiges Verhalten beobachten, das SAVAGE (1954, S. 16) einmal mit dem Sprichwort "You can cross the bridge when you come to it." charakterisiert hat. So können wir für eine positive Analyse unter Umständen mit der bisher entwickelten Präferenztheorie zufrieden sein, doch mindestens aus normativer Sicht hilft uns die Beobachtung kurzsichtigen Verhaltens nicht weiter. Sicherlich ist es unvernünftig, die Augen vor der Zukunft zu verschließen. Doch auch, wenn es um das wirkliche Verhalten der Menschen geht, kann bezweifelt werden, ob Kurzsichtigkeit tatsächlich die Regel bildet. In der (positiven) Haushaltstheorie ist der Thron des keynesianischen, von der Hand in den Mund lebenden Konsumenten durch FRIEDMANS (1957) Nobelpreiswerk *A Theory of the Consumption Function* ja nicht ohne Grund ins Wanken geraten. Mit dieser vornehmlich wegen ihrer empirischen Fundierung berühmten Studie wurde in der Präferenztheorie ein Rückbesinnungsprozeß eingeleitet, dem sich auch die Risikopräferenztheorie nicht verschließen kann.

Wir wollen in diesem Abschnitt den auch in der Zeit optimierenden *homo oeconomicus* unterstellen. Dabei wird sich zeigen, inwieweit und ob überhaupt die bislang gefundenen Ergebnisse zu modifizieren sind. Erstaunlicherweise, das sei schon jetzt verraten, werden wir in dem von Savage angeführten Sprichwort mehr Weisheit entdecken, als es jetzt den Anschein haben kann.

Wir nähern uns dem Problem der optimalen Mehrperiodenplanung in zwei Schritten. Zunächst erweitern wir den bisher diskutierten Ein-Perioden-Ansatz in einfacher Weise auf den Fall wiederholter Risikoprojektentscheidungen, wobei wir analog zum bisherigen Vorgehen annehmen, daß bis zum Planungshorizont keinerlei Konsum stattfindet. Anschließend wird diese Annahme dann aufgehoben, und es gilt, eine intertemporale Entscheidungsstrategie zu finden, die ein noch zu spezifizierendes Präferenzfunktional über Wahrscheinlichkeitsverteilungen ganzer Konsumpfade maximiert. Dabei wird zu einem jeden Zeitpunkt eine simultane Auswahl des Risikoprojekts und des Periodenkonsums zugelassen.

Anders als beim Einperiodenansatz müssen wir bei der Mehrperiodenanalyse die Frage klären, welche Risikoprojekte überhaupt gewählt werden

können, also die Frage nach der Struktur des Möglichkeitsbereichs der zur Wahl stehenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen. In der Einperiodenanalyse konnten wir diesen Möglichkeitsbereich als modellexogen unterstellen. Im Mehrperiodenfall ist diese Annahme aber nicht mehr sinnvoll, weil in der Regel der Alternativenvorrat an zur Wahl stehenden Risikoprojekten an das Vermögen des Entscheidungsträgers geknüpft ist, das seinerseits von den Ausprägungen zuvor gewählter Wahrscheinlichkeitsverteilungen abhängt. Ganz deutlich ist das am Aktienmarkt, wo man Risiken nur übernehmen kann, wenn gleichzeitig Kapital zur Verfügung gestellt wird, oder bei den Investitionsentscheidungen einer Unternehmung, die riskante (und ertragreiche) Projekte zwar in gewissem Umfang mit Krediten finanzieren kann, bei der aber letztlich doch die Eigenkapitalbasis bestimmt, wie groß die Risiken sein dürfen. Schließlich ist auch im Versicherungsgeschäft das Vermögen des Versicherungsnehmers eng mit der Höhe seines versicherbaren Risikos verknüpft.

Eine einfache Form, die Beziehung zwischen Vermögen und Risiko zu berücksichtigen, besteht darin, das nach Abzug eines etwaigen Periodenkonsums zum Zeitpunkt t vorhandene Vermögen a_t als Niveaufaktor aufzufassen, der nach Multiplikation mit einem stochastischen *Standard Einkommensfaktor* R_{t+1} das eine Zeitperiode später ausgezahlte Einkommen Y_{t+1} bestimmt:

$$(1) \quad Y_{t+1} = R_{t+1} a_t.$$

Da ein vielleicht vorhandenes deterministisches Zinseinkommen, wie wir es bislang immer angenommen haben, ebenfalls zum Vermögen proportional ist, brauchen wir es in Zukunft nicht mehr gesondert anzuführen. Das deterministische Zinseinkommen ist ein Teil von Y . Nach der Vermögenszuwachsdefinition des Einkommens wird mit (1) automatisch das zum Zeitpunkt $t+1$ verfügbare Vermögen festgelegt, so daß

$$(2) \quad V_{t+1} = Q_{t+1} a_t,$$

wenn $Q_{t+1} \equiv 1 + R_{t+1}$. Mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung von Q_{t+1} (bzw. R_{t+1}) wird eines aus einer Menge alternativer *Standardrisikoprojekte* definiert. Nimmt man an, daß diese Menge unabhängig vom Niveau a_t gegeben ist, dann liegt das vor, was ARROW (1965, S. 37) als *stochastisch konstante Skalenerträge* bezeichnet hat. Wegen

$$(3) \quad E(V_{t+1}) = a_t E(Q_{t+1})$$

und

$$(4) \quad \sigma(V_{t+1}) = a_t \sigma(Q_{t+1})$$

implizieren die stochastisch konstanten Skalenerträge im μ - σ -Diagramm je nach Höhe von a_i unterschiedliche Möglichkeitsbereiche, die, wie die Abb. 1 zeigt, durch Ursprungsprojektion auseinander hervorgehen.

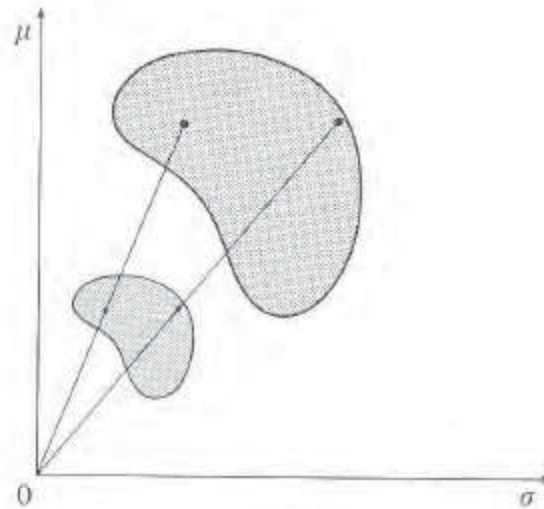


Abbildung 1

Die Annahme stochastisch konstanter Skalenerträge ist für die Entscheidungssituation eines Wertpapierhalters unmittelbar einsichtig: Wenn Peter ein Aktienpaket für 1000 DM und Paul eines für 2000 DM zusammenstellt, und wenn ferner Paul von jeder Aktie genau die doppelte Menge wie Peter kauft, dann wird Pauls Paket auch nach einer Periode doppelt so wertvoll wie Peters sein, wie auch immer die Kursentwicklung aussieht. Dieses und weitere Beispiele exakt oder wenigstens in erster Näherung stochastisch konstanter Skalenerträge werden wir im Anwendungskapitel V diskutieren. Hier genügt bereits eine ungefähre Vorstellung von wenigstens einem Anwendungsfall.

Zusätzlich zur Grundannahme stochastisch konstanter Skalenerträge treffen wir nun noch die folgenden, für die spätere Lösung des Mehrperiodenansatzes nötigen Annahmen:

- (1) Die Menge der Standardrisikoprojekte enthält eine nichtleere Teilmenge von solchen Projekten, für die $q_i > q_{\min} > 0$, wobei q_i die Ausprägung der Zufallsvariablen Q_i ist und q_{\min} eine beliebig kleine Zahl bezeichnet. Diese Annahme besagt, daß es irgendeine Wahlhandlung geben muß, die den Entscheidungsträger mit Sicherheit davor bewahren würde, sein gesamtes Vermögen zu verlieren. (Ob diese Wahlhandlung dann auch ergriffen wird, ist eine andere Frage.)
- (2) Die Möglichkeitsbereiche an Standardverteilungen Q_i und Q_{i^*} , $i \neq i^*$, sind stochastisch unabhängig. Die Berechtigung dieser Annahme werden wir im Anwendungskapitel V von Fall zu Fall untersuchen.

- (3) Es gilt die Maehkminn-Regel¹. Sie impliziert, daß
1. zu den juristischen Verteilungen, die oben gemeint waren, faktische Verteilungen gehören, die allesamt auf die positive Halbachse beschränkt sind, und
 2. für diese faktischen Verteilungen ebenfalls stochastisch konstante Skalenerträge (samt Nebenbedingungen (1) und (2)) vorliegen.
- Unterscheiden wir zwischen einem juristischen Standardrisikoprojekt Q_t^j und seinem faktischen Abbild Q_t^f , so folgen beide Punkte aus der Beziehung (III B 1), da sich aus ihr ableiten läßt, daß

$$Q_t^f = \begin{cases} 0, & \text{wenn } Q_t^j \leq 0, \\ Q_t^j, & \text{wenn } Q_t^j \geq 0. \end{cases}$$

Die in diesem Kapitel vorgenommenen Berechnungen beziehen sich durchweg auf die faktischen Verteilungen. Zur Verkürzung der Schreibweise lassen wir dabei allerdings den Index „f“ fort.

- (4) Der Entscheidungsträger besitzt entweder kein Humankapital, oder wenn er es besitzt, dann soll es einen sicheren Zinsfuß für Finanzanlagen geben, so daß das Humankapital eine deterministische Größe ist. Mit dieser Annahme wird noch einmal explizit auf das zu Beginn des Kapitels III eingeführte Vermögenskonzept zurückgegriffen. Ähnlich wie das Humankapital als Barwert deterministischer Arbeitseinkommen zulässig ist, dürfen auch andere, wie auch immer entstandene deterministische Einkommen vorkommen.

Mit diesen Annahmen und Spezifikationen läßt sich jetzt bereits der erste Schritt zum Mehrperiodenmodell unternehmen.

1. Die optimale Mehrperiodenplanung eines reinen Investitionsprogramms bei Unsicherheit

Gesetzt den Fall, ein Entscheidungsträger plane, sein zum Entscheidungszeitpunkt 0 vorhandenes Vermögen a_0 über T Perioden bestmöglich anzulegen und bei völliger Abstinenz zwischen 0 und T den entstandenen Endwert v_T in einem großen Festessen, dem *potlatch*, auf einmal zu konsumieren. Dann lautet seine Zielfunktion

$$(5) \quad \max E[U(V_T)]$$

¹ Vgl. Kap. III B.

mit $U(\cdot)$ als einer der Weber-Funktionen. Setzen wir $a_t = v_t$, um anzudeuten, daß das ganze zum Zeitpunkt t liquidierbare Vermögen sofort wieder reinvestiert wird, dann ist

$$(6) \quad V_T = a_0 \prod_{t=1}^T Q_t,$$

so daß die Zielfunktion zu

$$(7) \quad \max_Q E \left[U \left(a_0 \prod_{t=1}^T Q_t \right) \right]$$

wird. Der Maximierungsoperator bezieht sich dabei auf die Auswahl eines Standardrisikoprojektes für jede Periode. Die Standardrisikoprojekte brauchen weder identisch zu sein, noch bereits zum Zeitpunkt 0 festgelegt zu werden. Wir nehmen an, daß sie erst jeweils eine Periode, bevor ihre Ausprägungen bekannt werden, bestimmt werden müssen.

1.1. Das wachstumsoptimale Modell

Auf der Basis des Ansatzes von KELLY (1956) hat LATANÉ (1959, siehe bes. S. 151 Fn.) als Lösung vermutet, die Risikoprojekte müßten unabhängig von irgendwelchen Besonderheiten der subjektiven Präferenzstruktur so ausgewählt werden, daß der erwartete Logarithmus des jeweiligen Periodenendvermögens maximiert werde²:

$$(8) \quad \max_{Q_{t+1}} E [\ln(a_t Q_{t+1})] \quad \forall t.$$

Dies ist die klassische, von Bernoulli vorgeschlagene Entscheidungsregel. Die Begründung ist aber von ganz anderer Natur. Sie stützt sich, ähnlich wie die Argumentation zugunsten des Mittelwertkriteriums für Mehrfachrisiken, die wir oben schon kennengelernt haben, auf das Gesetz der großen Zahlen: Angenommen für die in jeder Periode verfügbaren Projekte mit den standardisierten Endvermögensverteilungen Q und Q' gelte $E(\ln Q) > E(\ln Q')$. Dann folgt in unmittelbarer Anwendung auf die obige Formel (A 6)

² Siehe dazu auch LATANÉ und TUTTLE (1967), BREIMAN (1960) und THORP (1971). HAKANSSON (1971) vergleicht das wachstumsoptimale Modell mit dem μ - σ -Modell auf theoretischer Basis, und ROLL (1973) liefert den entsprechenden empirischen Vergleich, der freilich prinzipiell keinerlei diskriminierenden Charakter haben kann. Vgl. Fn. 8.

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & W \left[U \left(a_0 \prod_{t=1}^T Q_t \right) \leq U \left(a_0 \prod_{t=1}^T Q'_t \right) \right] \\
 & = W \left[\prod_{t=1}^T Q_t \leq \prod_{t=1}^T Q'_t \right] \\
 & = W \left[\ln \prod_{t=1}^T Q_t \leq \ln \prod_{t=1}^T Q'_t \right] \\
 & = W \left[\sum_{t=1}^T \ln Q_t \leq \sum_{t=1}^T \ln Q'_t \right] \\
 & \leq \frac{1}{T} \left[\frac{\sigma(\ln Q - \ln Q')}{E(\ln Q - \ln Q')} \right]
 \end{aligned}$$

und wegen (A 7) somit

$$(10) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} W \left[U \left(a_0 \prod_{t=1}^T Q_t \right) \leq U \left(a_0 \prod_{t=1}^T Q'_t \right) \right] = 0.$$

Wegen $\max E[\ln Q_{t+1}] \sim \max E[\ln(a_t Q_{t+1})]$ führt also auf Dauer die Wahl jenes Projektes, für das der erwartete Logarithmus des Periodenendvermögens maximal ist, mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit zu einem höheren Vermögen und auch zu einem höheren Vermögensnutzen als jede andere Wahl. Kritikwürdig an dieser Aussage ist, daß sie nach wie vor auf der Basis einer *ex ante*-Entscheidung über alle Risikoprojekte gewonnen wurde, was ja eigentlich zu vermeiden war³. Darüber hinaus ist aber Latanés Vermutung, es folge aus diesem Ergebnis die Ungleichung

$$(11) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[U \left(a_0 \prod_{t=1}^T Q_t \right) \right] > E \left[U \left(a_0 \prod_{t=1}^T Q'_t \right) \right],$$

aus einem ähnlichen Grunde falsch wie jene, die allein aus dem Gesetz der großen Zahlen den Mittelwert als Präferenzfunktional für Mehrfachrisiken herleiten wollte: Mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit einen höheren Nutzen zu bringen, heißt eben nicht zwangsläufig, auch einen höheren erwarteten Nutzen zu verschaffen.

1.2. Die Lösung mittels stochastisch dynamischer Optimierung

Die wahre Lösung des Optimierungsproblems (14) findet man in dem Ansatz von MOSSIN (1968a)⁴. Sie basiert auf dem Bellmanschen *Optimalitätsprinzip*, welches besagt, daß^{5,6}

³ Aus dem gleichen Grund beschäftigen wir uns hier auch nicht mit dem Mehrperiodenansatz von TOBIN (1965), den MOSSIN (1968, S. 217f.) zutreffend kritisiert.

⁴ SAMUELSON (1971) setzt sich mit dem wachstumsoptimalen Modell auseinander und kommt zu der wahren Lösung. Sein Vorgehen ist aber nicht sehr schlüssig, da er

$$(12) \quad \max \{E[U(V_T)]|_{a_0} = E[U(a_0 \prod_{t=1}^T Q_t)]\}$$

impliziert

$$\max \{E[U(V_T)]|_{a_{t^*}} = E[U(a_{t^*} \prod_{t=t^*+1}^T Q_t)]\} \quad \forall t^*, 0 \leq t^* \leq T-1.$$

Hieraus folgt, daß man bei der aktuellen Entscheidung zum Zeitpunkt 0 davon ausgehen muß, daß das zum Zeitpunkt 1 realisierte Vermögen $v_1 = a_1$, wie groß es auch immer sei, bestmöglich für eine weitere Periode angelegt wird, genauso das zum Zeitpunkt 2 verfügbare Vermögen optimal reinvestiert wird und so fort, bis letztendlich der Investitionsprozeß durch den Konsum des zum Zeitpunkt T verfügbaren Vermögens unterbrochen wird.

Was zum Entscheidungszeitpunkt 0 die auch unter langfristigem Aspekt richtige Handlungsweise ist, kann durch einen Prozeß der periodenweisen rekursiven Optimierung festgestellt werden, bei dem zu jedem Zeitpunkt t^* , $0 \leq t^* < T-1$ eine der Forderungen

$$(13) \quad \frac{\left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} \{E(V_T^{1-\varepsilon'})|_{a_{t^*}} = E[(a_{t^*} \prod_{t=t^*+1}^T Q_t)^{1-\varepsilon'}]\} \equiv z_{t^*}, \varepsilon' \{ \leq \} 1}{\max \{E(\ln V_T)|_{a_{t^*}} = E[\ln(a_{t^*} \prod_{t=t^*+1}^T Q_t)]\} \equiv z_{t^*}, \varepsilon' = 1}$$

zu erfüllen ist. Hierbei wurden für $U(v_T)$ die Weber-Funktionen $(1-\varepsilon')v^{1-\varepsilon'}$, $0 < \varepsilon' \neq 1$, und $\ln v$, $\varepsilon' = 1$, gewählt. Das Risikoaversionsmaß ε' erfüllt im Prinzip die Funktion des bislang verwendeten ε , nur soll ε als Maß der für die aktuelle Entscheidung anzusetzenden Risikoaversion erhalten bleiben. Der konstante Faktor $(1-\varepsilon')$, der die Optimierungsaufgabe nicht berührt und ohnehin nur eine Vorzeichenfunktion erfüllt, wurde hier fortgelassen, so daß für $\varepsilon' > 1$ die *Minimierung* des Erwartungswertes vorzunehmen ist. Im folgenden wird nicht mehr erwähnt, wann eine Maximierung und wann eine Minimierung ansteht. Wir wollen vereinbaren, daß es nur bei $\varepsilon' > 1$ um eine Minimierung geht. Um unnötige Wiederholungen zu vermeiden, werden alle Funktionen simultan diskutiert. Der Fall der Potenzfunk-

die optimale „einmal-für-immer“-Entscheidung zu Beginn der Portfeuillesequenz bestimmt.

⁵ BELLMAN (1957, S. 83) beschreibt das Prinzip so: "An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision."

⁶ $\max E[U(V_T)]|_{a_0}$ heißt in Worten: „Maximiere den Erwartungsnutzen des Endvermögens zum Zeitpunkt T unter der Bedingung, daß das Anfangsvermögen zum Zeitpunkt 0, a_0 , vorgegeben ist!“ Eine entsprechende Schreibweise wird beibehalten.

tion wird dabei zuerst, der der logarithmischen Funktion als zweites aufgeschrieben.

Zeitpunkt $t^* = T-1$

Gesetzt den Fall, es sei nur noch eine Periode bis zum *potlatch* und es habe sich zufällig ein Vermögen der Höhe a_{T-1} angesammelt. Dann folgt aus (13) das herkömmliche Einperiodenentscheidungsproblem, das darin besteht, bei gegebenem Anfangsvermögen a_{T-1} den Erwartungsnutzen des Endvermögens V_T zu maximieren:

$$\begin{aligned}
 (14) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} \{ E(V_T^{1-\epsilon'}) |_{a_{T-1}} = E[(a_{T-1} Q_T)^{1-\epsilon'}] = a_{T-1}^{1-\epsilon'} E(Q_T^{1-\epsilon'}) \} \\
 & = a_{T-1}^{1-\epsilon'} \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} E(Q_T^{1-\epsilon'}) \\
 & \equiv a_{T-1}^{1-\epsilon'} j_T \equiv z_{T-1} \\
 & \frac{\max \{ E(\ln V_T) |_{a_{T-1}} = E[\ln(a_{T-1} Q_T)] = \ln a_{T-1} + E(\ln Q_T) \}}{= \ln a_{T-1} + \max E(\ln Q_T)} \\
 & \equiv \ln a_{T-1} + j_T \equiv z_{T-1}.
 \end{aligned}$$

Es ist bemerkenswert, daß offenkundig die Wahl eines aus der Menge der zur Verfügung stehenden Standardrisikoprojekte Q_T unabhängig vom vorhandenen Anlagebetrag a_{T-1} erfolgen kann, eine Eigenschaft der Weber-Funktionen, die gemeinhin als *Separation Property* bezeichnet wird⁷.

Zeitpunkt $t = T-2$

Zwei Perioden vor dem Planungshorizont ist das zum Zeitpunkt $T-1$ verfügbare Vermögen $V_{T-1} = A_{T-1}$ als Zufallsvariable zu betrachten, während das aktuelle Vermögen a_{T-2} als gegeben hinzunehmen ist. Aus (13) folgt dann

$$\begin{aligned}
 (15) \quad & z_{T-2} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} \{ E[V_T^{1-\epsilon'}] |_{a_{T-2}} = E[(a_{T-2} Q_{T-1} Q_T)^{1-\epsilon'}] \} \\
 & \frac{z_{T-2} \equiv \max \{ E[\ln V_T] |_{a_{T-2}} = E[\ln(a_{T-2} Q_{T-1} Q_T)] \}}{}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 (16) \quad & z_{T-2} = a_{T-2}^{1-\epsilon'} \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} E(Q_{T-1}^{1-\epsilon'}) \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} E(Q_T^{1-\epsilon'}) \\
 & = a_{T-2}^{1-\epsilon'} j_T \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} E(Q_{T-1}^{1-\epsilon'}) \\
 & \equiv a_{T-2}^{1-\epsilon'} j_{T-1} \\
 & \frac{z_{T-2} = \ln a_{T-2} + \max E(\ln Q_{T-1}) + \max E(\ln Q_T)}{= \ln a_{T-2} + j_T + \max E(\ln Q_{T-1})} \\
 & \equiv \ln a_{T-2} + j_{T-1}.
 \end{aligned}$$

⁷ PYE (1967) und mit Einschränkungen auch ARROW (1965, S. 28-44) haben diese Implikation der konstanten relativen Risikoaversion aufgedeckt.

Im Fall $\varepsilon \neq 1$ ist der Schritt von (15) nach (16) möglich, weil $a_{T-2} = \text{const.}$ und Q_T stochastisch unabhängig von Q_{T-1} ist, und somit

$$\begin{aligned} E[a_{T-2} Q_{T-1} Q_T]^{1-\varepsilon'} &= a_{T-2}^{1-\varepsilon'} E[Q_{T-1}^{1-\varepsilon'} Q_T^{1-\varepsilon'}] \\ &= a_{T-2}^{1-\varepsilon'} E(Q_{T-1}^{1-\varepsilon'}) E(Q_T^{1-\varepsilon'}). \end{aligned}$$

Die Unabhängigkeit hat zwei Gründe. Der eine liegt in der oben getroffenen Annahme der stochastisch unabhängigen Möglichkeitsbereiche an Standardrisikoprojekten, der andere in der Separation Property. Es ist anzumerken, daß im Fall $\varepsilon' = 1$ beim Übergang von (15) zu (16) die Unabhängigkeitsannahme nicht benötigt wird, da die Beziehung

$$\begin{aligned} E[\ln(a_{T-2} Q_{T-1} Q_T)] &= \ln a_{T-2} + E[\ln Q_{T-1} + \ln Q_T] \\ &= \ln a_{T-2} + E[\ln Q_{T-1}] + E[\ln Q_T] \end{aligned}$$

auch bei beliebiger Korrelation zwischen Q_{T-1} und Q_T gilt.

Zeitpunkt $t^* = T - \tau$

Analog zu dem für $T-2$ beschriebenen Vorgehen kann man nun fortfahren und kommt für den Zeitpunkt $T-\tau$, also z.B. auch bei $\tau = T$ für den letztlich interessierenden Entscheidungszeitpunkt 0, zu dem Resultat

$$\begin{aligned} (17) \quad z_{T-\tau} &= a_{T-\tau}^{1-\varepsilon'} j_{T-\tau+2} \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} E(Q_{T-\tau+1}^{1-\varepsilon'}) \\ &\quad \text{mit } j_{T-\tau+2} \equiv \prod_{t=T-\tau+2}^T \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} E(Q_t^{1-\varepsilon'}), \\ \frac{z_{T-\tau}}{a_{T-\tau}} &= \ln a_{T-\tau} + j_{T-\tau+2} + \max E(\ln Q_{T-\tau+1}) \\ &\quad \text{mit } j_{T-\tau+2} \equiv \sum_{t=T-\tau+2}^T \max E(\ln Q_t), \end{aligned}$$

woraus folgt, daß man sich mit der zum Zeitpunkt $t^* = T - \tau$ anstehenden Entscheidung auch in langfristiger Hinsicht genau dann optimal verhält, wenn man das Ziel

$$(18) \quad \left. \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} E(Q_{t^*+1}^{1-\varepsilon'}) \sim \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} E[(V_{t^*+1})^{1-\varepsilon'}] \\ \max E(\ln Q_{t^*+1}) \sim \max E[\ln(V_{t^*+1})] \end{array} \right\} \sim \max E[U(V_{t^*+1})]$$

verfolgt. Das ist ein beachtliches Ergebnis, besagt es doch, daß dann, wenn man eine dem Weberschen Relativitätsgesetz genügende Präferenzordnung über die zum Ende des Planungszeitraumes erreichbaren Endvermögensverteilungen hat, man auch eine kurzfristige, aus dem langfristigen Optimierungskalkül abgeleitete Präferenzordnung über Wahrscheinlichkeitsverteilungen des Periodenendvermögens besitzen sollte, die dem Weberschen

Gesetz gehorcht. Darüber hinaus ist es bemerkenswert, daß der Risikoaversionsparameter ε der für die aktuelle Entscheidung ableitbaren Nutzenfunktion $U(V_{t+1})$ mit dem entsprechenden Parameter ε' der Nutzenfunktion für das am Planungshorizont verfügbare Vermögen identisch ist. So kommt der dumme, kurzsichtige Mensch, dem es gerade dazu langt, den Erwartungsnutzen des aktuellen Periodenvermögens einzukalkulieren, zur gleichen Standardprojektwahl wie der schlaue, der unter Beachtung aller zukünftigen Entscheidungsmöglichkeiten seine aktuelle Entscheidung optimiert, wenn nur beide die gleiche durch ε bzw. ε' gemessene Risikofurcht haben.

Einige Worte müssen zur Frage der Existenz der in (18) angegebenen Lösung gesagt werden. Sie gelten sinngemäß auch für den anderen unten noch zu diskutierenden Ansatz und werden dort nicht wiederholt. Wenn für alle Verteilungen Q_{t+1} der zu den Zeitpunkten $t=0, \dots, T-1$ zur Wahl stehenden Möglichkeitsbereiche gilt, daß $Q_{t+1} > q_{\min} > 0$, so ist die Existenz gesichert, da

$$U(q_{\min}) = \begin{cases} (1 - \varepsilon') q_{\min}^{1 - \varepsilon'}, & \varepsilon' \neq 1, \\ \ln q_{\min}, & \varepsilon' = 1, \end{cases}$$

endlich ist und somit auch $j_t, t=1, \dots, T$. Wegen der unteren Beschränkung von $U(Q_t) = (1 - \varepsilon') Q_t^{1 - \varepsilon'}$, $\varepsilon' < 1$, bleibt die Existenz selbst für Verteilungen mit $q_{\min} = 0$ noch gesichert, wenn die Risikoaversion nur mäßig ist. Doch was ändert sich, wenn mit $\varepsilon' \geq 1$ starke Risikoaversion vorliegt und zudem $q_{\min} = 0$ ist? Immerhin können in diesem Fall die Möglichkeitsbereiche auch Verteilungen mit

$$E[U(Q_t)] = \begin{cases} E[(1 - \varepsilon') Q_t^{1 - \varepsilon'}] \\ E(\ln Q_t) \end{cases} = -\infty$$

enthalten, so daß j_t unendlich wird, wenn es mindestens eine solche Verteilung umfaßt. Das aber kann nicht vorkommen. Nach der in (17) angegebenen Definition von j interessieren nämlich nur die Maxima von $E(\ln Q_t)$ bzw. Minima von $E(Q_t^{1 - \varepsilon'})$, $\varepsilon' > 1$, und die sind endlich, weil jeder Möglichkeitsbereich annahmegemäß *auch* eindeutig bessere Verteilungen mit $Q_t > q_{\min} > 0$ enthält. So existiert die Optimallösung also auch bei $\varepsilon' \geq 1$ und $q_{\min} = 0$.

Die wichtigste Implikation der vorangegangenen Überlegungen ist, daß wir den zunächst nur für faktische Vermögen aufgestellten Mehrperiodenansatz nun ohne jede Schwierigkeit auf die Bewertung links unbeschränkter Verteilungen ausweiten können, wenn wir nur die durch die Maehkminn-Regel formulierte Beziehung zwischen juristischer und faktischer Verteilung beachten. Die im Kapitel IIB aufgedeckten Implikationen (wie z.B. die Indifferenzkurvensysteme im μ - σ -Diagramm für lineare Verteilungsklassen

juristischer Vermögen) bleiben dann fast vollständig erhalten. Die einzige Einschränkung liegt darin, daß wir hier angenommen haben, daß der Möglichkeitsbereich u.a. auch Projekte mit $Q_t > q_{\min} > 0$ enthält, während dort eine solche Einschränkung nicht vorgenommen worden war. Für alle im Kapitel V zu untersuchenden Anwendungsbeispiele wird sich die Einschränkung aber als nicht restriktiv erweisen.

Mit dem Ergebnis (18) wird offenkundig, daß Latané's Argumentation für eine kurzfristige Regel $\max E(\ln v)$ nicht haltbar ist. Diese Regel kann zwar auch aus dem dynamischen Programmierungsansatz herauskommen⁸, der Grund hat aber nichts mit dem Gesetz der großen Zahlen zu tun, sondern liegt einfach darin, daß hier das Webersche Gesetz die spezielle Ausprägung einer logarithmischen Nutzenfunktion annimmt. Beim Vorliegen einer Potenzfunktion gibt es ja sogleich eine andere kurzfristige Entscheidungsregel.

Daher können wir zusammenfassen: Gilt es in einem Mehrperiodeninvestitionsprogramm den Erwartungsnutzen des zum Planungshorizont vorhandenen faktischen Vermögens zu maximieren, gehorcht die Präferenzstruktur dem Weberschen Relativitätsgesetz und liegt ein Möglichkeitsbereich mit stochastisch konstanten Skalenerträgen (und Nebenbedingungen) vor, dann ist die aktuelle Entscheidung optimal, wenn unter der Verwendung der Nutzenfunktion für das zum Planungshorizont erreichbare faktische Vermögen der Erwartungsnutzen des aktuellen faktischen Periodenendvermögens maximiert wird und entsprechend in den nachfolgenden Perioden verfahren wird. Mit einer geringfügigen Einschränkung gilt das Ergebnis sinngemäß auch für die Bewertung links unbeschränkter juristischer Verteilungen. (So führt z.B. die Verwendung der Indifferenzkurvensysteme der Abb. 10 und 12 im Kapitel III nach wie vor zum Auffinden der besten Verteilung aus einem Möglichkeitsbereich von Verteilungen, die alle derselben linearen Klasse entstammen.)

2. Die optimale Mehrperiodenplanung eines stochastischen Konsum-Investitionsprogramms

Die bislang unterstellte Zielsetzung, alle Erträge bis zum Zeitpunkt T zu reinvestieren, dann aber vollständig zu konsumieren, dürfte für die wenigsten Entscheidungsprobleme charakteristisch sein. Realistischerweise muß man zulassen, daß die in jeder Periode verfügbaren Mittel im Prinzip auch zum Konsum (oder im Unternehmensmodell: zur Ausschüttung) verwendet

⁸ Aus diesem Grund ist eine empirische Diskriminierung natürlich unmöglich, und die empirische Evidenz, die z.B. von ROLL (1973) zugunsten des wachstumsoptimalen Modells gefunden wurde, stützt unsere Präferenzhypothese gleichermaßen.

werden können; in welchem Ausmaß sie dann tatsächlich dem Konsum zugeführt werden, ist durch den Optimierungskalkül zu bestimmen⁹.

Von entscheidender Bedeutung für einen solcherart verallgemeinerten Ansatz ist, welche Zielfunktion des Entscheidungsträgers zugrundegelegt wird. Wir diskutieren dieses Problem im Abschnitt B 2.1. Nach Auffinden einer geeigneten Zielfunktion werden wir dann in den Abschnitten B 2.2 und B 2.3 eine explizite Lösung vornehmen und sie interpretieren.

2.1. Das Mehrperiodenzielfunktional

Unterstellen wir wie zuvor, daß es einen festen Planungshorizont T gibt, dann lautet die Aufgabe des Entscheidungsträgers

$$(19) \quad \max R(C_0, \dots, C_{T-1}, V_T),$$

wobei $R(\cdot)$ das noch zu spezifizierende Präferenzfunktional, (C_0, \dots, C_{T-1}) einen stochastischen Konsumpfad und V_T ein stochastisches, am Planungshorizont noch verfügbares Endvermögen darstellt. Im Unternehmensmodell kann V_T als das für die Fortführung des Betriebes noch verwendbare Eigenkapital am Planungshorizont und im Haushaltsmodell als das den Erben hinterlassene Vermögen fungieren.

Bei der Frage nach den Eigenschaften von $R(\cdot)$ gibt es zwei Probleme. Zum einen muß man klären, wie $R(\cdot)$ im Spezialfall eines deterministischen Konsumpfades¹⁰ aussieht, und zum anderen welche Besonderheiten sich für den stochastischen Fall ergeben. Nur mit diesem zweiten Aspekt werden wir uns ausführlich beschäftigen. Bezüglich des ersten greifen wir indes auf bereits vorhandene Literatur zurück.

Wir übernehmen als deterministisches Zielfunktional die von STROTZ (1955/56) und MODIGLIANI/BRUMBERG (1955) eingeführte und von KOOPMANS (1960) axiomatisch begründete Version

$$(20) \quad \Sigma \equiv \sum_{t=0}^{T-1} \lambda_t u(c_t) + \lambda_T u(v_T); \quad \lambda_t, \lambda_T > 0, u'(\cdot) > 0, u''(\cdot) < 0.$$

⁹ PHELPS (1962) hat dieses Problem im Rahmen eines stochastischen Mehrperiodenmodells behandelt, dabei jedoch die Frage der optimalen Wahl der Risikoprojekte durch die Annahme, es gebe überhaupt nur eine einzige Anlageform, ausgeklammert. Eine simultane Betrachtung des zweifachen Problems, *wieviel* und *in welches* Projekt investiert werden sollte, wurde in einem Zweiperiodenmodell von SANDMO (1968, 1969) und TOBIN (1968) vorgenommen. Anschließend entwickelte Mehrperiodenmodelle, die eine simultane Lösung beider Probleme anbieten, werden im Text genannt.

¹⁰ Unter einem „Konsumpfad“ wollen wir der Kürze halber im folgenden immer die gesamte Sequenz $(C_0, \dots, C_{T-1}, V_T)$ (also einschließlich des Endvermögens) verstehen.

Dabei ist $u(\cdot)$ eine reellwertige, bis auf eine Lineartransformation bestimmte Periodennutzenfunktion, und λ_t ein periodenspezifischer Gewichtungsfaktor.

Trotz der axiomatischen Begründung kann man (20) nicht als generell akzeptable Handlungsmaxime bei Planungsproblemen unter Sicherheit auffassen. Der Grund liegt in der durch die Summierung aufgezeigten Separabilität der Zielfunktion¹¹. Die Separabilität impliziert, daß der Konsum einer Periode keinerlei Einfluß auf die Präferenzordnung über alternative Konsumpfade während des Restes der Planungsperiode hat. Eine solche Annahme ist streng genommen unrealistisch. Als Vereinfachung dürfte sie aber vertretbar sein, wenn man bedenkt, daß Komplementaritäten zwischen den Konsumniveaus verschiedener Zeitpunkte wohl um so schwächer sind, je weiter diese Zeitpunkte auseinander liegen, somit also schon durch eine Periodenverlängerung ihres störenden Charakters beraubt werden können¹².

Für wie gewichtig man diese Kritik auch halten mag, es ist doch anzuerkennen, daß (20) Eigenschaften aufweist, wie man sie von einem mehrdimensionalen Präferenzfunktional allgemein erwarten sollte. So ist wegen $u'(c) > 0$ und $u''(c) < 0$ die Grenzrate der Substitution zwischen den Konsumniveaus zweier Zeitpunkte negativ,

$$(21) \quad \left. \frac{dc_{t^*}}{dc_t} \right|_{\Sigma} = - \frac{u'(c_t) \lambda_t}{u'(c_{t^*}) \lambda_{t^*}} < 0,$$

und darüber hinaus absolut fallend:

$$(22) \quad \left. \frac{d^2 c_{t^*}}{dc_t^2} \right|_{\Sigma} = \frac{-\lambda_{t^*}^2 u'(c_{t^*})^2 \lambda_t u''(c_t) - \lambda_t^2 u'(c_t)^2 \lambda_{t^*} u''(c_{t^*})}{u'(c_{t^*})^3} > 0.$$

Es ist ratsam, sich über die Funktion der Gewichtungsfaktoren λ_t Klarheit zu verschaffen. Wegen der Annahme eines stationären Periodennutzens, die sich in der für alle Perioden festen Funktion $u(c_t)$ zeigt, wäre $-dc_{t^*}/dc_t|_{\Sigma} = 1$, wenn $\lambda_{t^*} = \lambda_t$ und $c_{t^*} = c_t$, und eine von 0 verschiedene Zeitpräferenzrate $-dc_{t^*}/dc_t|_{\Sigma} - 1$ könnte es nur bei $c_{t^*} \neq c_t$ geben. Es würde hier also gerade nur von BÖHM-BAWERKS (1888, S. 328–331) erster Zinsgrund der *Verschiedenheit des Verhältnisses von Bedarf und Deckung* erfaßt. Von Böhm-Bawerks (S. 332–338) zweitem Grund der *Minderschätzung zukünftiger Bedürfnisse* wegen einer perspektivischen Verkleinerung der Zu-

¹¹ Vgl. KOOPMANS' (1960) Postulat 3.

¹² Das wurde von ARROW und KURZ (1970, S. 11f.) betont. Vgl. aber auch STROTZ (1957 u. 1959).

kunft wird erst durch die subjektiven Diskontfaktoren λ_t Rechnung getragen, für die in dynamischen Optimierungsmodellen durchweg

$$(23) \quad \lambda_{t-1} > \lambda_t > \lambda_{t+1} \quad \forall t < T-1$$

angenommen wird¹³, so daß selbst bei $c_{t^*} = c_t$ eine positive Zeitpräferenzrate $-dc_{t^*}/dc_t|_{\Sigma} - 1 > 0$ vorliegt. Zur Veranschaulichung sind die Indifferenzkurven für den Fall ohne Minderschätzung zukünftiger Bedürfnisse und für $\lambda_{t^*} < \lambda_t$ (bei $t^* > t$) im Fisherschen Zwei-Perioden-Diagramm dargestellt worden:

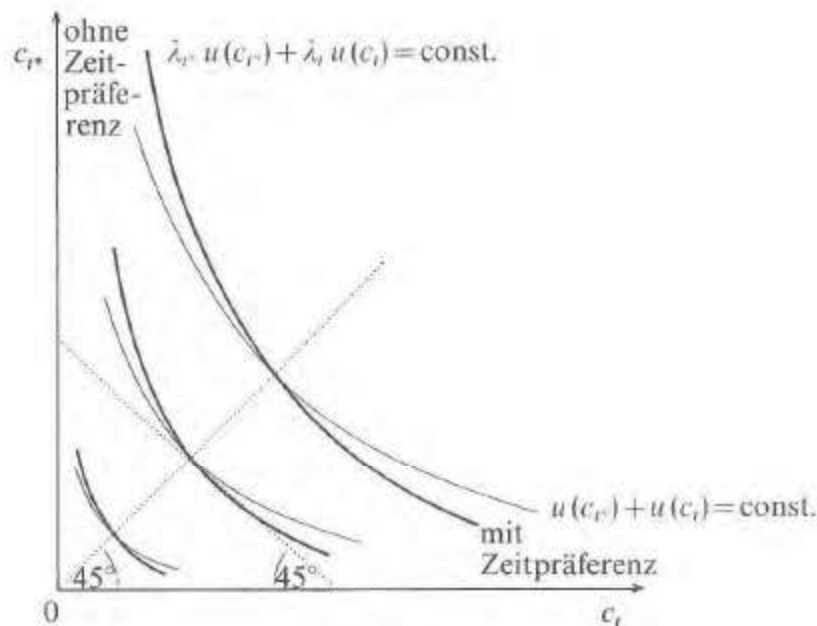


Abbildung 2

Wenngleich kaum daran zu zweifeln ist, daß die Menschen zukünftige Bedürfnisse in perspektivischer Verkleinerung sehen, so ist es zumindest überlegenswert, ob sich dieser Umstand auch in einem dynamischen Optimierungsmodell niederschlagen sollte, wie es über die Bedingung (23) geschieht. Denn immerhin ist von Böhm-Bawerks Begründung ganz auf die *Irrationalität* der Menschen abgestellt: Man ärgert sich im nachhinein, weil

¹³ Nach dieser Formulierung ist es zulässig, daß sich mit fortschreitender Kalenderzeit, t , das relative Gewicht λ_{t+1}/λ_t der von t aus gesehenen Zukunft verändert. Fordert man, wie STROTZ (1955/56) es als selbstverständlich annahm, daß λ_{t+1}/λ_t unabhängig von t ist, dann darf nur noch $\lambda_t = e^{-\rho t}$ ($\rho \equiv$ Zeitpräferenzrate) vorliegen, wenn die Mehrperiodenplanung konsistent bleiben soll. Doch warum soll λ_{t+1}/λ_t von t unabhängig sein? Sollte man bei der Lebenszyklusplanung eines Individuums nicht erwarten, daß sich die Gegenwartsvorliebe mit zunehmendem Alter ändert?

man seine wahren Bedürfnisse früher unterschätzt hat¹⁴. Irrationalität aber paßt schlecht in ein dynamisches Optimierungsmodell, bei dem ansonsten Rationalität der höchsten Stufe vorausgesetzt wird. Doch gibt es mindestens für die individuelle Lebenszyklusinterpretation des dynamischen Optimierungsmodells nicht nur die Minderschätzung zukünftiger Bedürfnisse im Sinne einer *Unterschätzung*, wie es von Böhm-Bawerk meint, sondern auch eine *ex post* für richtig gehaltene geringere Bewertung in dem Sinne, daß man sagt: „Gut daß ich mir als junger Mensch etwas geleistet habe. Damals konnte ich es wenigstens noch genießen.“ Daher wollen wir (23) als Kennzeichen des Normalfalles beibehalten, freilich ohne damit die Möglichkeit $\lambda_t = 1 \forall t < T$ auszuschließen.

Die Regel (23) umschließt nicht den Faktor λ_T . Der Grund ist, daß er nicht nur eine Diskontierungsfunktion hat, sondern zugleich das den Erben hinterlassene Vermögen bewertet, wenn wir an die Lebenszyklusplanung eines Individuums denken. Hat man ein Unternehmensmodell vor Augen, dann ist λ_T ein Maß für die Wichtigkeit des am Planungshorizont noch vorhandenen Eigenkapitals.

2.1.1. Spezifische Risikoaversion in der Mehrperiodenplanung

Wie ist nun das Koopmans-Zielfunktional (20) auf den Fall stochastischer Konsumpfade zu verallgemeinern? Eine Möglichkeit ist, einfach den Erwartungsoperator vorzuschalten, d. h.

$$(24) \quad R(\cdot) = E \left[\sum_{t=0}^{T-1} \lambda_t u(C_t) + \lambda_T u(V_T) \right]$$

zu setzen. Dies ist jedenfalls der Ansatz, der von HAKANSSON (1969 u. 1970), SAMUELSON (1969), MERTON¹⁵ (1969), LELAND (1974) und vielen anderen gewählt wird, ohne den Versuch einer Legitimation zu unternehmen.

Der mit (24) beschrittene Weg ist indes keineswegs zufriedenstellend, da er es nicht zuläßt, eine *spezifische Risikoaversion* zu berücksichtigen. Stellen wir uns einmal vor, es gäbe zwei Personen, die unter allen nur denkbaren Mehrperiodenentscheidungsproblemen bei Sicherheit zu der gleichen Entscheidung kämen. Würden diese Personen auch bei Entscheidungsproblemen unter Unsicherheit durchweg die gleiche Entscheidung treffen? Nichts berechtigt uns, diese Frage zu bejahen, denn es mag sehr wohl sein, daß sich beide (nur) bezüglich ihrer Risikoneigung unterscheiden. Wenn nun aber das

¹⁴ Im gleichen Sinne äußert sich PIGOU (1932, S. 25): „... people distribute their resources between the present, the near future and the remote future on the basis of a wholly irrational preference.“ Siehe auch STROTZ (1955/56, bes. S. 178).

¹⁵ In einer kontinuierlichen Version.

adäquate Präferenzfunktional vom Typus (24) ist, dann darf die Risikoneigung dieser beiden Personen nicht unterschiedlich sein. Wenn sie sich nämlich bei allen Entscheidungsproblemen unter Sicherheit gleich verhalten, dann haben sie (bis auf eine Lineartransformation) auch das gleiche Präferenzfunktional für den Unsicherheitsfall¹⁶.

Dies heißt nun nicht etwa, daß (24) kein risikoaversives Verhalten impliziert. Wie die zitierten Ansätze zeigen, sorgt die Konkavität der Periodennutzenfunktion dafür, daß bei der von Periode zu Periode erneut anstehenden Entscheidung über die „beste“ Wahrscheinlichkeitsverteilung Risikofurcht obwaltet. Das Problem ist nur, daß diese Risikofurcht bloß ein Nebenprodukt der Konkavität von $u(\cdot)$ ist, die ja im deterministischen Modell eine fallende Grenzrate der Substitution zwischen den Konsumniveaus zweier Zeitpunkte zur Folge hat (vgl. (22)) und damit verhindert, daß der gesamte Konsum des Entscheidungsträgers in einer einzigen Periode konzentriert wird. Was im Zielfunktional (24) fehlt, ist ein zusätzliches Instrument, mit Hilfe dessen die Risikoaversion des Entscheidungsträgers manipuliert werden kann, ohne gleichzeitig die Präferenzen bezüglich des Zeitprofils des Konsums in einer sicheren Welt zu verändern. Wie kann man Abhilfe schaffen?

Unser Vorschlag ist, dem Koopmans-Funktional eine bis auf eine positive Lineartransformation bestimmte Funktion $\Psi(\cdot)$ vorzuschalten, so daß

$$(25) \quad R(\cdot) = E \left\{ \Psi \left[\sum_{t=0}^{T-1} \lambda_t u(C_t) + \lambda_T u(V_T) \right] \right\}.$$

Der Vorteil dieser Formulierung ist, daß $\Psi(\cdot)$ keinen Einfluß auf die optimalen Entscheidungen bei Sicherheit hat, denn maximiert man die Koopmans-Funktion Σ , so auch jede streng monoton steigende Funktion von Σ . Natürlich bleibt daher auch die Grenzrate der Substitution unter Sicherheit,

$$(26) \quad \left. \frac{dc_{t^*}}{dc_t} \right|_{\Psi(\Sigma)} = - \frac{\frac{\partial \Psi(\cdot)}{\partial \Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial c_t}}{\frac{\partial \Psi(\cdot)}{\partial \Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial c_{t^*}}} = - \frac{u'(c_t) \lambda_t}{u'(c_{t^*}) \lambda_{t^*}},$$

unberührt (vgl. (21)). Die Funktion $\Psi(\cdot)$ hat aber aus den gleichen Gründen wie im Einperiodenfall einen Einfluß auf die optimale Entscheidung, wenn Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Konsumpfaden und damit auch Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Σ zu bewerten sind. $\Psi(\cdot)$ über-

¹⁶ Es wird vorausgesetzt, daß (24) für alle Entscheidungsprobleme unter Sicherheit eine eindeutige Lösung hat.

nimmt damit die Rolle einer *spezifischen Risikopräferenzfunktion*¹⁷. Es wird sich zeigen, daß die Einführung der spezifischen Risikopräferenzfunktion drastische Auswirkungen auf die intertemporale Risikoprojektwahl hat. (Sie ist z.B. verantwortlich für eine ganz charakteristische Zeitabhängigkeit der Risikoaversion.)

Die Verwendung einer spezifischen Risikopräferenzfunktion in der Mehrperiodenanalyse ist nicht nur plausibel, sondern fast schon ein zwingendes Gebot der Rationalität, in ähnlicher Weise „zwingend“ jedenfalls wie die Erwartungsnutzenregel¹⁸ im Einperiodenfall. Das läßt sich leicht zeigen, wenn wir die folgenden vier Axiome betrachten, von denen die letzten drei im Prinzip bereits aus der Einperiodenanalyse geläufig sind¹⁹:

(1) Koopmans-Axiom: *Es existiert ein wohlspezifiziertes Präferenzfunktional*

$$\Sigma = \sum_{t=0}^{T-1} \lambda_t u(c_t) + \lambda_T u(v_T)$$

für Planungsprobleme bei Sicherheit.

(2) Ordnungsaxiom: *Es existiert eine vollständige schwache Ordnung über Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Konsumpfaden c_0, \dots, c_{T-1}, v_T .*

(3) Unabhängigkeitsaxiom: *Es gelte für zwei dieser Wahrscheinlichkeitsverteilungen e_1 und e_2 : $e_1 \{ \succsim \} e_2$. Dann folgt für Verteilungen, die unter Verwendung einer beliebigen Verteilung e_3 zusammengesetzt werden,*

$$\begin{pmatrix} w & 1-w \\ e_1 & e_3 \end{pmatrix} \{ \succsim \} \begin{pmatrix} w & 1-w \\ e_2 & e_3 \end{pmatrix}, \text{ wenn } 0 < w \leq 1.$$

(4) Archimedisches Axiom: *Gegeben seien drei Ausprägungen des Koopmans-Funktional, Σ_1, Σ und Σ_2 , mit $\Sigma_1 < \Sigma < \Sigma_2$.*

Dann gibt es genau eine Wahrscheinlichkeit w , $0 < w < 1$, so daß

$$\Sigma \sim \begin{pmatrix} w & 1-w \\ \Sigma_1 & \Sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Axiom (1) entledigen wir uns des Problems, das „richtige“ Präferenzfunktional für Planungsprobleme bei Sicherheit zu finden. Wir

¹⁷ Damit ähnelt unser Vorschlag jenem KRELLES (1968, S.144–147) für den Einperiodenfall.

¹⁸ Es wird nicht behauptet, daß es ein zwingendes Gebot der Rationalität ist, sich bei Entscheidungen unter Sicherheit nach dem Koopmans-Funktional zu richten. Nur wenn dieses Funktional gegeben ist, dann *muß* es durch eine spezifische Risikopräferenzfunktion ergänzt werden.

¹⁹ Vgl. Kap. II C 2.1.

gehen davon aus, daß das Koopmans-Funktional in einer wohlspezifizierten mathematischen Form vorliegt, die der Entscheidungsträger als kompatibel mit seinen Präferenzen über sichere Konsumpfade ansieht.

Die Axiome (2) und (3) sind einfache Erweiterungen der entsprechenden Axiome aus dem Einperiodenfall und bringen keine grundsätzlich neuen Probleme mit sich. Sie beziehen sich als Grenzfall auch auf degenerierte Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die aus sicheren Konsumpfaden bestehen. Axiom (3) besagt daher, daß in einer Wahrscheinlichkeitsverteilung von Konsumpfaden Pfade mit gleichem Σ gegeneinander ausgetauscht werden dürfen, ohne daß sich an der Bewertung der gesamten Verteilung etwas ändert. Dies ist eine wichtige Implikation, denn sie bedeutet, daß man beim Vergleich zweier Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Konsumpfaden gar nicht die einzelnen Pfade selbst, sondern nur die zugehörigen Verteilungen für Σ zu kennen braucht. Im Zusammenhang mit Axiom (2) sichert dies die Existenz einer vollständigen Präferenzordnung über Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Σ . Natürlich gilt dann auch für *diese* Wahrscheinlichkeitsverteilungen das Unabhängigkeitsaxiom.

Das vierte Axiom entspricht weitgehend seinem Pendant für den Einperiodenfall, hat indes als Besonderheit, daß es sich auf Ausprägungen des Präferenzfunktionals Σ statt auf objektive Größen bezieht. Da die Periodennutzenfunktion $u(\cdot)$ reellwertig ist, ist diese Spezialität aber belanglos: Wenn keine lexikographische Ordnung zwischen Konsumpfaden vorliegt, muß man Axiom (4) als Anforderung an eine Präferenzordnung akzeptieren. Es sei der Klarheit halber angeführt, daß Axiom (4) nicht besagt, daß es unabhängig von den Gewichtungsfaktoren λ_T und der Gestalt der Funktion $u(\cdot)$ eine feste Indifferenzwahrscheinlichkeit w gibt. Zu einer solchen Interpretation könnte man verleitet sein, wenn man bedenkt, daß $u(\cdot)$ nur bis auf eine positive Lineartransformation bestimmt ist und deshalb in Grenzen variiert werden kann, ohne daß dies Auswirkungen auf die Planung bei Sicherheit hätte. Vielmehr wird die Eindeutigkeit der Indifferenzwahrscheinlichkeit nur für den Fall einer bereits (wenn auch teilweise willkürlich) festgelegten Funktion $u(\cdot)$ und gegebener Gewichtungsfaktoren λ_t postuliert.

Da das im Einperiodenansatz angeführte Nichtsättigungsaxiom für das Präferenzfunktional Σ selbstverständlich erfüllt ist, kann man Axiom (4) und die auf Σ bezogenen Axiome (2) und (3) in der formal gleichen Weise verknüpfen, wie es im Kapitel II C 2.2 für die entsprechenden Axiome im Einperiodenfall geschah. Unter Beachtung des Axioms (1) ist das Ergebnis, wie behauptet, das Präferenzfunktional (25).

2.1.2. Das Zielfunktional nach dem Fechnerschen Gesetz

Im vorigen Abschnitt haben wir überlegt, wie sich Rationalverhalten in der Mehrperiodenplanung bei Unsicherheit äußert. Analog zum Einperiodenfall geht es jetzt darum, die allgemeine Zielfunktion (25) durch eine

spezielle Präferenzhypothese zu beleben. Wir greifen wieder auf das Webersche Gesetz zurück, werden uns jetzt aber zusätzlich auch des bislang nur zur Interpretation benötigten Fechnerschen Gesetzes bedienen.

Das Webersche Gesetz können wir uns zunutze machen, wenn wir das Periodenendvermögen in der bisherigen Betrachtung durch einen Faktor x ersetzen, der das Niveau eines Konsumpfades $(xc_0^*, \dots, xc_{T-1}^*, xv_T^*)$ messe, der durch eine das Zeitprofil erhaltende Multiplikation eines willkürlich gewählten Basispfades $(c_0^*, \dots, c_{T-1}^*, v_T^*)$ mit x entstanden ist. Dieses Vorgehen steht in völligem Einklang mit der eingangs des dritten Kapitels gegebenen Vermögensdefinition. Nach dem (schwachen) Relativitätsaxiom muß für das Präferenzfunktional (25) dann gelten:

$$(27) \quad \Psi \left[\sum_{i=0}^{T-1} \lambda_i u(xc_i^*) + \lambda_T u(xv_T^*) \right] \\ = \begin{cases} x^{1-\varepsilon'} \Psi \left[\sum_{i=0}^{T-1} \lambda_i u(c_i^*) + \lambda_T u(v_T^*) \right], & \varepsilon' \neq 1 \\ \ln x + \Psi \left[\sum_{i=0}^{T-1} \lambda_i u(c_i^*) + \lambda_T u(v_T^*) \right], & \varepsilon' = 1 \end{cases}.$$

Dabei ist ε' das Maß der subjektiven Risikoneigung für die Bewertung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen X mit der Ausprägung x . Wir werden noch sehen, in welcher Beziehung es zu dem für die Bewertung des aktuellen Periodenendvermögens verantwortlichen Risikoaversionsmaß ε steht.

Leider reicht die in (27) enthaltene Information noch nicht aus, um $\Psi(\cdot)$ und $u(\cdot)$ zu bestimmen, denn sie bezieht sich ja nur auf einen Summeneffekt beider Funktionen. Wir benötigen also zusätzliche Informationen über $\Psi(\cdot)$ oder $u(\cdot)$. Für $u(\cdot)$ lassen sie sich in der Tat gewinnen, wenn wir uns an die Diskussion der psychologischen Relativitätsgesetze im dritten Kapitel erinnern.

Man beachte, daß für die Begründung der additiven Koopmans-Funktion (20) bereits die (bei genügend langen Perioden akzeptable) Annahme unabhängiger Periodennutzen getroffen wurde. M.E. erlaubt es diese Annahme, $u(\cdot)$ als Nutzenfunktion im klassischen Sinne und damit auch, was entscheidend ist, als eine psychophysische Empfindungsfunktion zu interpretieren. Wenn unsere Empfindung der Größe eines für den Periodenkonsument verfügbaren Geldbetrages vom gleichen Funktionstyp gesteuert wird wie die Empfindung der Länge einer Geraden, der Anzahl von Punkten in einer Punktwolke oder vor allem wie die Empfindung einer Zahlengröße, dann gehorcht $u(\cdot)$ dem Fechnerschen Logarithmusgesetz. Dieses Ergebnis fassen wir in dem folgenden Axiom zusammen, das nicht nur die Gültigkeit des Weberschen Relativitätsgesetzes, sondern darüber hinaus des Fechnerschen Gesetzes verlangt.

Strenges Relativitätsaxiom: *Gleiche relative Änderungen des Periodenkonsums bewirken gleiche absolute Änderungen der Periodennutzens.*

Das gesuchte Zielfunktional für die deterministische Mehrperiodenplanung lautet daher

$$\sum_{t=0}^{T-1} \lambda_t (a + b \ln c_t) + \lambda_T (a + b \ln v_T)$$

oder mit einigen Normierungen, die wir ohne eine Beschränkung der Allgemeinheit vornehmen können²⁰,

$$(28) \quad \sum_{t=0}^{T-1} \lambda_t \ln c_t + \lambda_T \ln v_T, \quad \sum_{t=0}^T \lambda_t = 1.$$

Das Zielfunktional ist von der Art, wie es bereits von MODIGLIANI und BRUMBERG (1955, S. 396, Fn. 15) unter explizitem Hinweis auf die Erkenntnisse der Psychophysik erwogen worden war²¹.

Nun ist es ein Leichtes, die noch unbekannte spezifische Risikopräferenzfunktion $\Psi(\cdot)$ zu finden, die mit (27) und (28) kompatibel ist. Offenbar haben wir²²

$$(29) \quad \Psi(\Sigma) = \begin{cases} (1 - \varepsilon') e^{(1 - \varepsilon') \Sigma}, & \varepsilon' \neq 1, \\ \Sigma, & \varepsilon' = 1. \end{cases}$$

Entsprechend lauten die möglichen Versionen des gesuchten Zielfunktional $R(C_1, \dots, C_{T-1}, V_T)$ für die stochastische Mehrperiodenplanung:

$$(30) \quad R(\cdot) = E \left\{ (1 - \varepsilon') e^{(1 - \varepsilon') [\sum_{t=0}^{T-1} \lambda_t \ln C_t + \lambda_T \ln V_T]} \right\} \\ = E \left\{ (1 - \varepsilon') \prod_{t=0}^{T-1} C_t^{(1 - \varepsilon') \lambda_t} V_T^{(1 - \varepsilon') \lambda_T} \right\}, \quad \text{wenn } \varepsilon' \neq 1,$$

und

$$(31) \quad R(\cdot) = E \left(\sum_{t=0}^{T-1} \lambda_t \ln C_t + \lambda_T \ln V_T \right), \quad \text{wenn } \varepsilon' = 1.$$

Das Ergebnis zeigt, daß das additive Präferenzfunktional für Entscheidungsprobleme bei Sicherheit nur im Fall $\varepsilon' = 1$ erhalten bleibt. In allen

²⁰ Die Normierungen haben keinen Einfluß auf die Klasse der in (29) angegebenen Präferenzfunktionale.

²¹ Ähnlich lautet auch HELSONS (1947 u. 1964) Formel für das Adaptionsniveau. Vgl. Kap. III A 1.3.4.

²² Man vergleiche die Formeln (II A 38) und (II A 39).

anderen Fällen liegt statt dessen ein multiplikatives Zielfunktional vor. (Bei $\varepsilon < 1$ in einer Cobb-Douglas-Version.) Einige Implikationen eines solchen Typus sind in der speziellen Version $\lambda_t = \lambda^t$, $t = 0, 1, \dots, T$, $0 < \lambda < 1$, bereits von PYE (1972) untersucht worden. Pye gibt allerdings praktisch keine, geschweige denn eine der unsrigen irgendwie ähnliche Begründung des Zielfunktional. Statt dessen preist er den multiplikativen Typus wegen seiner Implikationen für das Risikoverhalten. Wir wollen, freilich ohne uns auf den Fall $\lambda_t = \lambda^t \forall t$ zu beschränken, sehen, was es damit auf sich hat.

2.2. Der rekursive Lösungsansatz

Für die mit (30) und (31) gefundenen Zielfunktionen und unter der Annahme stochastisch konstanter Skalenerträge (nebst Nebenbedingungen) gilt es jetzt, das Problem

$$(32) \quad \max R(C_0, \dots, C_{T-1}, V_T)|_{v_0}$$

zu lösen. Der Kontrolle des Entscheidungsträgers unterliege zu einem jeden Zeitpunkt t das eine Periode später zur Auszahlung kommende Risikoprojekt Q_{t+1} und die Vermögenskonsumquote $\alpha_t \equiv c_t/v_t$. Dabei ist v_t das zum Zeitpunkt t verfügbare Vermögen vor Abzug des Periodenkonsums. Das Vermögen nach Abzug des Periodenkonsums ist $a_t = v_t(1 - \alpha_t)$. Wir vereinbaren, im Prinzip Zufallsvariablen groß und deterministische, d.h. dem Entscheidungsträger bekannte Variablen klein zu schreiben²³.

Formulieren wir bei $\varepsilon' > 1$ wieder eine Minimierungsaufgabe, dann ist nach dem Bellmannschen *Optimalitätsprinzip*²⁴ zu einem jeden Zeitpunkt t^* , $0 \leq t^* \leq T-1$, der Forderung

$$(33) \quad \frac{\begin{cases} \max \\ \min \end{cases} E \left[\prod_{t=t^*}^{T-1} C_t^{(1-\varepsilon')\lambda_t} V_T^{(1-\varepsilon')\lambda_T} \right] |_{v_{t^*}}}{\max E \left[\sum_{t=t^*}^{T-1} \lambda_t \ln C_t + \lambda_T \ln V_T \right] |_{v_{t^*}}}, \quad \text{wenn } \begin{cases} \varepsilon' < 1 \\ \varepsilon' > 1 \end{cases},$$

Genüge zu tun. (33) kennzeichnet die aus der Sicht des Anfangszeitpunkts optimale Konsum- und Investitionspolitik in der Weise, daß auch zu einem jeden späteren Zeitpunkt auf der Basis des dann vorhandenen Vermögens eine Politik gewählt wird, die aus der Sicht dieses Zeitpunkts optimal ist. Diese Regel wird es uns ermöglichen, die Eigenschaften einer optimalen Planung aufzudecken.

²³ Ausgenommen sind Indices und Parameter.

²⁴ Vgl. Beziehung (12).

Zeitpunkt $t^* = T-1$

Es ist zunächst die letzte Entscheidungssituation vor dem Ende der Planungsperiode zu analysieren. Bei einem wie auch immer vorgegebenen v_{T-1} ist durch eine geeignete simultane Wahl der Konsumquote α_{T-1} und des Standardrisikoprojekts Q_T die nachfolgende Forderung zu erfüllen²⁵:

$$(34) \quad \frac{\left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} E(c_{T-1}^{(1-\varepsilon)\lambda_{T-1}} V_T^{(1-\varepsilon)\lambda_T})|_{v_{T-1}}}{\max E(\lambda_{T-1} \ln c_{T-1} + \lambda_T \ln V_T)|_{v_{T-1}}} \\ \equiv z_{T-1} \\ \equiv z_{T-1}$$

Wegen $V_T = (1 - \alpha_{T-1}) Q_T v_{T-1}$ und $c_{T-1} = \alpha_{T-1} v_{T-1}$ kann diese Forderung zu dem folgenden Ausdruck umgeformt werden, den wir durch das Vorziehen von Konstanten sogleich noch etwas vereinfachen:

$$(35) \quad z_{T-1} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} E[(\alpha_{T-1} v_{T-1})^{(1-\varepsilon)\lambda_{T-1}} \\ ((1 - \alpha_{T-1}) Q_T v_{T-1})^{(1-\varepsilon)\lambda_T}]}{v_{T-1}^{(1-\varepsilon)(\lambda_{T-1} + \lambda_T)} \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} [\alpha_{T-1}^{(1-\varepsilon)\lambda_{T-1}} \\ (1 - \alpha_{T-1})^{(1-\varepsilon)\lambda_T} E(Q_T^{(1-\varepsilon)\lambda_T})]} \\ z_{T-1} = \max E[\lambda_{T-1} \ln(\alpha_{T-1} v_{T-1}) + \lambda_T \ln((1 - \alpha_{T-1}) v_{T-1} Q_T)] \\ = (\lambda_{T-1} + \lambda_T) \ln v_{T-1} + \max[\lambda_{T-1} \ln \alpha_{T-1} \\ + \lambda_T \ln(1 - \alpha_{T-1}) + \lambda_T E(\ln Q_T)].$$

Beachtenswert ist, daß auch hier ähnlich wie beim reinen Akkumulationsansatz das Optimierungsproblem isoliert von der Größe des vorhandenen Kapitals und unabhängig von dem in der Vorperiode realisierten q_{T-2} gelöst werden kann, denn hinter den Erwartungsoperatoren in der jeweils zweiten Zeile tauchen ja Termini mit v_{T-1} nicht mehr auf, und der Möglichkeitsbereich für die Verteilungen Q_T ist annahmegemäß nicht durch eine Autokorrelation gestört. Wir wollen die Lösung jetzt noch gar nicht explizit versuchen, sondern uns derweil mit der Feststellung begnügen, daß es unabhängig von der speziellen Ausprägung, in der v_{T-1} vorliegt, feste Optimalwerte für α_{T-1} und $E(Q_T^{(1-\varepsilon)\lambda_T})$ bzw. $E(\ln Q_T)$ gibt.

Zeitpunkt $t^* = T-2$

Die Zielfunktion lautet jetzt:

²⁵ Wie zuvor steht die Formel über dem Querstrich jeweils für $\varepsilon \neq 1$ und die darunter für $\varepsilon = 1$.

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} \{ E (c_{T-2}^{(1-\varepsilon)\lambda_{T-2}} C_{T-1}^{(1-\varepsilon)\lambda_{T-1}} V_T^{(1-\varepsilon)\lambda_T}) | v_{T-2} \\
& = E [(v_{T-2} \alpha_{T-2})^{(1-\varepsilon)\lambda_{T-2}} \\
& \quad (v_{T-2} Q_{T-1} (1-\alpha_{T-2}) \alpha_{T-1})^{(1-\varepsilon)\lambda_{T-1}} \\
& \quad (v_{T-2} Q_{T-1} Q_T (1-\alpha_{T-2}) (1-\alpha_{T-1}))^{(1-\varepsilon)\lambda_T}] \\
& \equiv z_{T-2} \\
(36) \quad & \frac{\max \{ E (\lambda_{T-2} \ln c_{T-2} + \lambda_{T-1} \ln C_{T-1} + \lambda_T \ln V_T) | v_{T-2} \\
& = E [\lambda_{T-2} \ln (v_{T-2} \alpha_{T-2}) \\
& \quad + \lambda_{T-1} \ln (v_{T-2} Q_{T-1} (1-\alpha_{T-2}) \alpha_{T-1}) \\
& \quad + \lambda_T \ln (v_{T-2} Q_{T-1} Q_T (1-\alpha_{T-2}) (1-\alpha_{T-1}))] \}}{z_{T-2}} \\
& \equiv z_{T-2}
\end{aligned}$$

Durch das Vorziehen von Konstanten und das Zusammenfassen gleicher Faktoren erhält man:

$$\begin{aligned}
z_{T-2} &= v_{T-2}^{(1-\varepsilon)(\lambda_{T-2} + \lambda_{T-1} + \lambda_T)} \\
& \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} [\alpha_{T-1}^{(1-\varepsilon)\lambda_{T-1}} (1-\alpha_{T-1})^{(1-\varepsilon)\lambda_T} \\
& \quad \alpha_{T-2}^{(1-\varepsilon)\lambda_{T-2}} (1-\alpha_{T-2})^{(1-\varepsilon)(\lambda_{T-1} + \lambda_T)} \\
& \quad E(Q_{T-1}^{(1-\varepsilon)(\lambda_{T-1} + \lambda_T)} Q_T^{(1-\varepsilon)\lambda_T})] \\
(37) \quad & \frac{z_{T-2} = (\lambda_{T-2} + \lambda_{T-1} + \lambda_T) \ln v_{T-2} \\
& \quad + \max [\lambda_{T-1} \ln \alpha_{T-1} + \lambda_T \ln (1-\alpha_{T-1}) \\
& \quad + \lambda_{T-2} \ln \alpha_{T-2} + (\lambda_{T-1} + \lambda_T) \ln (1-\alpha_{T-2}) \\
& \quad + E((\lambda_{T-1} + \lambda_T) \ln Q_{T-1} + \lambda_T \ln Q_T)]}{z_{T-2}}
\end{aligned}$$

Wegen der Annahme, daß Q_{T-1} und Q_T und damit auch irgendwelche festen Funktionen dieser Zufallsvariablen stochastisch unabhängig sind, können wir (37) auch folgendermaßen schreiben²⁶:

$$\begin{aligned}
z_{T-2} &= v_{T-2}^{(1-\varepsilon)(\lambda_{T-2} + \lambda_{T-1} + \lambda_T)} \\
& \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} [\alpha_{T-1}^{(1-\varepsilon)\lambda_{T-1}} (1-\alpha_{T-1})^{(1-\varepsilon)\lambda_T} \\
& \quad E(Q_T^{(1-\varepsilon)\lambda_T}) \\
& \quad \alpha_{T-2}^{(1-\varepsilon)\lambda_{T-2}} (1-\alpha_{T-2})^{(1-\varepsilon)(\lambda_{T-1} + \lambda_T)} \\
& \quad E(Q_{T-1}^{(1-\varepsilon)(\lambda_{T-1} + \lambda_T)})] \\
(38) \quad & \frac{z_{T-2} = (\lambda_{T-2} + \lambda_{T-1} + \lambda_T) \ln v_{T-2} \\
& \quad \max [\lambda_{T-1} \ln \alpha_{T-1} + \lambda_T \ln (1-\alpha_{T-1}) \\
& \quad + \lambda_T E(\ln Q_T) \\
& \quad + \lambda_{T-2} \ln \alpha_{T-2} + (\lambda_{T-1} + \lambda_T) \ln (1-\alpha_{T-2}) \\
& \quad + (\lambda_{T-1} + \lambda_T) E(\ln Q_{T-1})]}{z_{T-2}}
\end{aligned}$$

²⁶ Vgl. Fn. 4, S. 220.

(Man beachte allerdings, daß im Fall $\varepsilon' = 1$ der Schritt von (37) nach (38) sogar für stochastisch korrelierte Risiken möglich ist.)

Die Ausdrücke in der jeweils zweiten und dritten Zeile von (38) sind mit den zu extremierenden Ausdrücken aus Gleichung (35) bereits bekannt. Nimmt man gemäß dem Bellmann-Prinzip eine entsprechende Substitution vor und zieht man die substituierten Ausdrücke vor die Extremierungsoperatoren in (38), so erhält man:

$$(39) \quad \begin{aligned} z_{T-2} &= v_{T-2}^{(1-\varepsilon')(\lambda_{T-2} + \lambda_{T-1} + \lambda_T)} \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} [\alpha_{T-1}^{(1-\varepsilon')\lambda_{T-1}} (1 - \alpha_{T-1})^{(1-\varepsilon')\lambda_T} E(Q_T^{(1-\varepsilon')\lambda_T})] \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} [\alpha_{T-2}^{(1-\varepsilon')\lambda_{T-2}} (1 - \alpha_{T-2})^{(1-\varepsilon')(\lambda_{T-1} + \lambda_T)} \\ &\quad \quad E(Q_{T-1}^{(1-\varepsilon')(\lambda_{T-1} + \lambda_T)})]. \\ z_{T-2} &= \frac{(\lambda_{T-2} + \lambda_{T-1} + \lambda_T) \ln v_{T-2}}{(\lambda_{T-2} + \lambda_{T-1} + \lambda_T)} \\ &\quad + \max [\lambda_{T-1} \ln \alpha_{T-1} + \lambda_T \ln (1 - \alpha_{T-1}) + \lambda_T E(\ln Q_T)] \\ &\quad + \max [\lambda_{T-2} \ln \alpha_{T-2} + (\lambda_{T-1} + \lambda_T) \ln (1 - \alpha_{T-2}) \\ &\quad \quad + (\lambda_{T-1} + \lambda_T) E(\ln Q_{T-1})]. \end{aligned}$$

Zeitpunkt $t^* = T - \tau$

Man kann nun in der beschriebenen Weise fortfahren und kommt dann zu dem Ergebnis, daß die extremierte Zielfunktion allgemein die folgende Form annimmt:

$$(40) \quad \begin{aligned} z_{T-\tau} &= v_{T-\tau}^{(1-\varepsilon') \sum_{i=T-\tau}^T \lambda_i} \prod_{i=T-\tau}^{T-1} \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} [\alpha_i^{(1-\varepsilon')\lambda_i} (1 - \alpha_i)^{(1-\varepsilon') \sum_{i=i+1}^T \lambda_i} \\ &\quad E(Q_{i+1}^{(1-\varepsilon') \sum_{i=i+1}^T \lambda_i})]. \\ z_{T-\tau} &= \frac{\sum_{i=T-\tau}^T \lambda_i \ln v_{T-\tau} + \sum_{i=T-\tau}^{T-1} \max [\lambda_i \ln \alpha_i + \sum_{i=i+1}^T \lambda_i \ln (1 - \alpha_i) \\ &\quad \quad + \sum_{i=i+1}^T \lambda_i E(\ln Q_{i+1})]}{\sum_{i=T-\tau}^T \lambda_i}. \end{aligned}$$

Die hier gestellte Extremierungsaufgabe verlangt offenkundig auch, daß der in der jeweils zweiten Zeile von (40) aufgeschriebene Ausdruck für sich genommen extremiert wird, welchen Wert die Konsumquoten α_i auch immer annehmen. So erhalten wir

$$(41) \quad \begin{aligned} z_{T-\tau} &= v_{T-\tau}^{(1-\varepsilon') \sum_{i=T-\tau}^T \lambda_i} \prod_{i=T-\tau}^{T-1} \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} [\alpha_i^{(1-\varepsilon')\lambda_i} (1 - \alpha_i)^{(1-\varepsilon') \sum_{i=i+1}^T \lambda_i} \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} E(Q_{i+1}^{(1-\varepsilon') \sum_{i=i+1}^T \lambda_i})]. \\ z_{T-\tau} &= \frac{\sum_{i=T-\tau}^T \lambda_i \ln v_{T-\tau} + \sum_{i=T-\tau}^{T-1} \max [\lambda_i \ln \alpha_i + \sum_{i=i+1}^T \lambda_i \ln (1 - \alpha_i) \\ &\quad \quad + \sum_{i=i+1}^T \lambda_i \max E(\ln Q_{i+1})]}{\sum_{i=T-\tau}^T \lambda_i}. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt besteht darin, den in der jeweils zweiten Zeile von (41) stehenden Ausdruck vor die an erster Stelle stehenden Erwartungsoperatoren zu ziehen, weil er in bezug auf die die Optimierung der Konsumquote als Konstante behandelt werden kann:

$$(42) \quad z_{T-\tau} = v_{T-\tau}^{(1-\varepsilon) \sum_{i=T-\tau}^T \lambda_i} \prod_{i=T-\tau}^{T-1} \left[\begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} E(Q_{i+1}^{(1-\varepsilon) \sum_{j=i+1}^T \lambda_j}) \\ \left. \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} (\alpha_i^{(1-\varepsilon) \lambda_i} (1-\alpha_i)^{(1-\varepsilon) \sum_{j=i+1}^T \lambda_j})],$$

$$z_{T-\tau} = \sum_{i=T-\tau}^T \lambda_i \ln v_{T-\tau} + \sum_{i=T-\tau}^{T-1} \left[\sum_{j=i+1}^T \lambda_j \max E(\ln Q_{j+1}) \right. \\ \left. + \max (\lambda_i \ln \alpha_i + \sum_{j=i+1}^T \lambda_j \ln (1-\alpha_j)) \right].$$

Dieser Ausdruck soll nun auf seine Implikationen für die optimale Verhaltensstrategie des Entscheidungsträgers hin interpretiert werden.

2.3. Interpretation der Lösung

2.3.1. Die Rehabilitation des Einperiodenansatzes

Für die optimale Entscheidung zum Zeitpunkt t , bei $t=T-\tau=0$ also auch für die optimale Entscheidung zum Beginn des Planungsproblems, bringt die Beziehung (42) zwei wichtige Ergebnisse. Das erste ist, daß das optimale Standardrisikoprojekt nach einer der folgenden Regeln gesucht werden muß:

$$(43) \quad \max \left\{ \begin{array}{l} (1-\varepsilon') E(Q_{t+1}^{(1-\varepsilon') \sum_{j=t+1}^T \lambda_j}) \\ E(\ln Q_{t+1}) \end{array} \right\}, \quad \text{wenn} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \varepsilon' \neq 1 \\ \varepsilon' = 1 \end{array} \right\}.$$

Das zweite ist eine Formel für die optimale Vermögenskonsumquote, α_t^* :

$$(44) \quad \alpha_t^* = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{i=t+1}^T \lambda_i}{\lambda_t}}, \quad \varepsilon' > 0.$$

Diese Formel folgt nach Differentiation von (42) nach α_t und Nullsetzen des Ergebnisses. Sie gilt gleichermaßen für das multiplikative wie das additive Zielfunktional.

Ähnlich, wie wir es schon im reinen Akkumulationsansatz feststellen konnten, finden wir mit (43) die Weber-Funktionen für die periodenweise Bewertung der Standardrisikoprojekte bestätigt. Im Falle der Potenzfunktion nimmt der Exponent jetzt zwar einen zeitabhängigen Wert an, aber, worauf es ankommt, zu einem gegebenen Entscheidungszeitpunkt ist er konstant. Neu ist die Berücksichtigung der Vermögenskonsumquote. Mit (44) haben wir eine Formel, die das Konsumverhalten nur vom zeitlichen Verlauf der Gewichtsfaktoren λ_t abhängig macht; es wird also durch die Gegenwartsvorliebe des Entscheidungsträgers, aber nicht durch seine Risikoneigung bestimmt.

Die Ergebnisse (43) und (44) geben uns sehr einfache Verhaltensregeln für die Mehrperiodenanalyse. Der wichtigste Aspekt ist wohl, daß der Entscheidungsträger weder bei der aktuell vorzunehmenden Auswahl der optimalen Konsumquote noch bei der Auswahl des optimalen Risikoprojekts zukünftige Ertragsaussichten (nach der Betrachtungsperiode) zu berücksichtigen hat. Somit ist der Anspruch, den wir an seinen Informationsstand stellen müssen, damit er das oben formulierte intertemporale Entscheidungsproblem überhaupt lösen kann, außerordentlich gering: Was er über die Zukunft wissen muß, sind nur seine eigenen Präferenzen. Wer bislang das Gefühl hatte, der Entscheidungsträger sei mit unserem Ansatz überfordert, den muß dieser Aspekt beruhigen.

Ein anderer, etwas subtilerer Aspekt ist, daß eine Trennbarkeit zwischen der aktuell vorzunehmenden Entscheidung über die optimale Vermögenskonsumquote und das optimale Risikoprojekt vorliegt. Der Entscheidungsträger kann seine Wahl in zwei Schritten vornehmen. Zunächst bestimmt er, unabhängig von dem aktuell verfügbaren Alternativenvorrat an Standardrisikoprojekten, seinen optimalen Periodenkonsum und damit auch das nach Abzug dieses Konsums noch vorhandene Anfangsvermögen $a_t = v_t - c_t$. Anschließend sucht er aus der wegen des konstanten Wertes für a_t nun festen Menge alternativ verfügbarer Periodenendvermögensverteilungen eine „beste“ aus. Dabei richtet er sich nach der Regel $\max E[U(V)]$ mit $U(\cdot)$ als einer der Weber-Funktionen und $V = a_t Q_{t+1}$.

A priori konnte man die Trennbarkeit der beiden Wahlprobleme kaum erwarten. Eher hätte man wohl vermutet, daß die Profitabilität des besten verfügbaren Risikoprojekts einen Einfluß auf das Volumen des zur Reinvestition bestimmten Vermögens a_t nimmt. Der Grund dafür, warum diese Vermutung falsch ist, liegt in dem strengen Relativitätsaxiom. Dieses Axiom impliziert einen logarithmischen Periodennutzen, der, wie man sich leicht überlegen kann, eine Substitutionselastizität zwischen den Konsumniveaus zweier Zeitpunkte von Eins zur Folge hat. Bei einem solchen Wert heben sich der Einkommens- und der Substitutionseffekt der Veränderung in einer speziellen Ausprägung, die ein Standardrisikoprojekt annehmen kann, gerade auf. So ist es dem Entscheidungsträger im Hinblick auf seine Konsument-

scheidung egal, ob er diese Veränderung oder auch die Veränderung in einer ganzen Wahrscheinlichkeitsverteilung von solchen Ausprägungen kennt oder nicht. In jedem Fall wählt er dasselbe Konsumniveau^{27, 28}.

Die für den Mehrperiodenansatz ermittelten Verhaltensregeln bewirken eine ganz erstaunliche Rehabilitation des einfachsten entscheidungstheoretischen Ansatzes, wie wir ihn früher benutzt hatten. Es zeigt sich jetzt, daß wir ohne eine besondere Einschränkung der Allgemeinheit²⁹ in der Tat von der Konsumententscheidung wie auch vom Zeitaspekt des Entscheidungsproblems abstrahieren durften.

Die Rehabilitation geht aber noch weiter. Aus dem gleichen Grund wie im Zusammenhang mit dem reinen Akkumulationsansatz bereits erörtert, sind wir auf dem Wege über die Machkminn-Regel wieder in der Lage, sogar unbeschränkte juristische Verteilungen zu bewerten. Die dazu aus dem

²⁷ Damit können wir auch MOSSIN (1969 u. 1973, S. 29–32), der uns in Erkenntnis der allgemeinen Verquickung der Risikoprojekt- und Sparentscheidung keine andere Empfehlung geben kann, als „die Finger zu kreuzen“ und unter der Vernachlässigung der Sparentscheidung weiter zu machen, das schlechte Gewissen nehmen. Setzt man nach seiner Terminologie (von 1973) für das stochastische Einkommen zum Zeitpunkt 2 den Wert $Y_2 = (Y_1 - c_1)(Q - 1)$, wobei Y_1 das Anfangsvermögen, c_1 den aktuellen Periodenkonsument und Q das Standardrisikoprojekt bezeichnet, dann wird seine Formel $\max E[u(c_1, Y - c_1)]$, $Y = Y_1 + Y_2$, mit $u(\cdot)$ als dem Zielfunktional und Y_2 als dem zum Zeitpunkt 2 anfallenden Einkommen zu $\max E\{u[c_1, Y_1 + (Y_1 - c_1)(Q - 1) - c_1]\} = \max E\{u[c_1, (Y_1 - c_1)Q]\}$. Hierfür haben wir das Ergebnis

$$\max E\{u[c_1, (Y_1 - c_1)Q]\} \sim \max E\{U[(Y_1 - c_1^*)Q]\}$$

parat, wobei c_1^* den isoliert bestimmbaren optimalen Konsum zum Zeitpunkt 1 bedeutet. Mit Hilfe einer Nutzenfunktion $v(\cdot)$ (Terminologie nach Mossin!), die so definiert sei, daß $v(x + c_1) \equiv U(x)$, kann die Optimierungsaufgabe daher auch als

$$\max E\{v[(Y_1 - c_1)Q + c_1^*]\} = \max E[v(Y)]$$

geschrieben werden, wie es Mossin verlangt. Man beachte allerdings, daß dieses einfache Ergebnis nicht mehr erzielt werden kann, wenn man die Hypothese der Vermögensabhängigkeit der Risiken aufgibt. Vgl. zu diesem Problem auch SPENCE und ZECKHAUSER (1972).

²⁸ Dieses Ergebnis besagt nicht notwendigerweise, daß der Konsum auch unabhängig von einer Veränderung im Kapitalmarktzinssatz ist, den wir in unserem Ansatz als konstant unterstellt haben. Eine Zinserhöhung würde nämlich ein möglicherweise vorhandenes Humankapital verringern und auf diesem Wege eine Verminderung des Konsums bewirken. (Dies ist der mit einem Aufsatz von METZLER (1951) so berühmt gewordene zinsinduzierte Vermögenseffekt.) Der hier entwickelte Ansatz steht daher im Einklang mit jüngsten empirischen Untersuchungen zur Zinselastizität der Konsumnachfrage: Siehe BOSKIN (1978).

²⁹ Eine Einschränkung liegt freilich immer noch insofern vor, als wir für die Mehrperiodenanalyse stochastisch konstante Skalenerträge unterstellt haben. Bei der Analyse vermögensunabhängiger Risiken würden sich im Mehrperiodenfall zusätzliche Probleme ergeben, die wir hier nicht erörtert haben.

Mehrperiodenansatz ableitbaren Präferenzen sind die gleichen wie im Einperiodenfall. So bleibt z. B. die im Kapitel III B abgeleitete geknickte Nutzenfunktion wie auch das zugehörige Indifferenzkurvensystem im μ - σ -Diagramm vollständig erhalten.

Die Rehabilitation des Einperiodenansatzes ist sicherlich das wichtigste Ergebnis der Mehrperiodenanalyse, aber es ist nicht das einzige. In den nächsten beiden Abschnitten werden wir prüfen, was (43) und (44) über den Einfluß der Zeit auf die optimalen Entscheidungen aussagen. Diese Information konnte uns der Einperiodenansatz natürlich noch nicht bringen.

2.3.2. Die Zeit als Determinante der Risikoaversion

Die wesentliche Neuerung, die (42) im Vergleich zum Einperiodenansatz liefert, ist die Zeitabhängigkeit der Risikoaversion. Nennen wir ε_{t+1} das für die Risikoprojektwahl zum Zeitpunkt t relevante Maß der relativen Risikoaversion³⁰, dann folgt aus (43) für den Fall $\varepsilon' = 1$ wie auch $\varepsilon' \neq 1$:

$$(45) \quad \varepsilon_{t+1} = 1 - (1 - \varepsilon') \sum_{i=t+1}^T \lambda_i.$$

Da der Summenausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung mit fortschreitender Zeit kleiner wird, wenn nur $\lambda_i > 0$, muß sich die „aktuelle“ Risikoaversion im Zeitablauf von oben oder unten³¹ dem Wert Eins nähern oder diesen Wert beibehalten, falls sie ihn schon anfänglich hatte. Die Abb. 3 zeigt mögliche Zeitpfade der Risikoaversion einmal beispielhaft für den Fall $\lambda_i = \lambda^* = \text{const. } \forall i \leq T$. Wegen $\sum_{i=0}^T \lambda_i = 1$ ist in diesem Fall $\lambda^* = 1/(T+1)$ und (45) wird zu

$$(46) \quad \varepsilon_t = 1 - (1 - \varepsilon') \frac{T-t+1}{T+1},$$

was einen linearen Zeitpfad für das Risikoaversionsmaß ε anzeigt.

Die Pfade der Abb. 3 wurden erst beginnend mit dem Zeitpunkt 1 durchgezogen eingezeichnet. Dadurch soll angedeutet werden, daß zum Zeitpunkt 1 erstmalig eine Wahrscheinlichkeitsverteilung des Periodenendvermögens anfällt. Man kann sich aber dennoch überlegen, welche Risikoaversion angebracht wäre, wenn man zum Zeitpunkt 0 an einem Glücksspiel mit sofortiger Auszahlung teilnehmen könnte. Nach (45) findet man unter Berücksichtigung von $\sum_{i=0}^T \lambda_i = 1$, daß $\varepsilon_0 = \varepsilon'$. Damit kommt man genau zur ursprünglichen Interpretation von ε' in (27) zurück. Dort sollte ε' die

³⁰ Siehe Gleichung (III A 33).

³¹ Dabei wäre es sogar möglich, daß eine anfängliche Risikofreude ($\varepsilon < 0$) in Risikofurcht umschlägt.

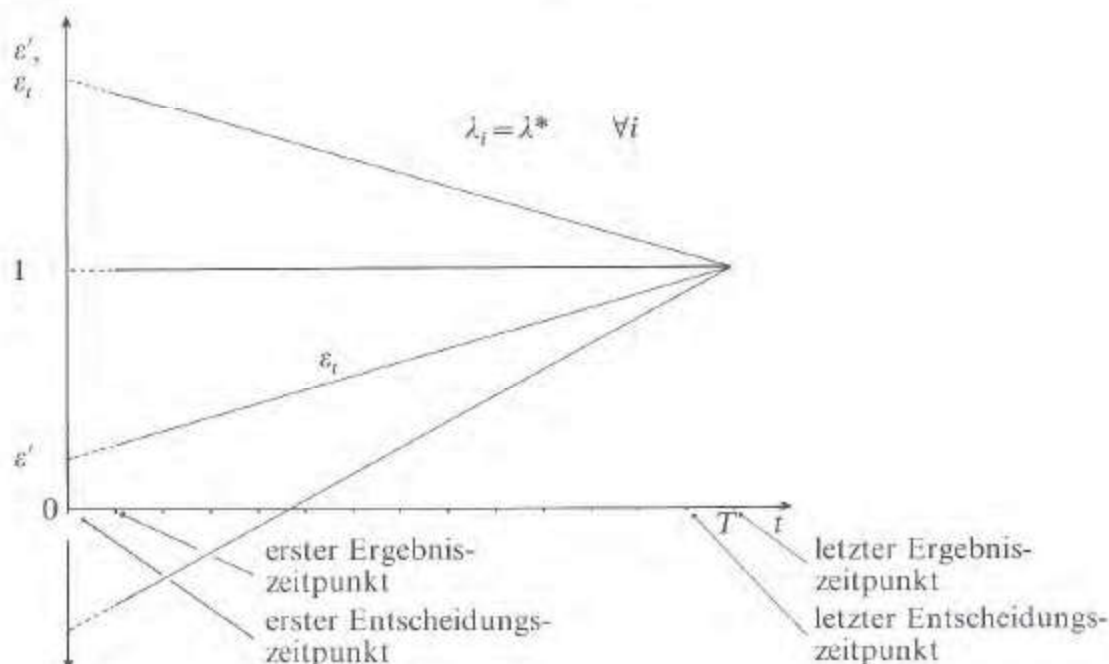


Abbildung 3

Bewertung von Verteilungen über Standardkonsumpfade, die sich nur in ihrem Niveau x unterscheiden, anzeigen. Hier sehen wir, daß sich offenbar das Ausgangsvermögen v_0 mit dem Niveauparameter x identifizieren läßt. Das ist plausibel, aber nicht selbstverständlich, denn während wir für (27) unterstellt haben, daß eine Verdopplung von x eine Verdopplung des Konsums zu jedem Zeitpunkt impliziert, haben wir bei der expliziten Lösung des Mehrperiodenoptimierungsproblems nichts dergleichen angenommen. Vielmehr zeigt die Tatsache, daß in (44) die optimalen Vermögenskonsumquoten unabhängig von den Vermögensbeständen sind, daß sich die ehemalige Annahme nun als Ergebnis eines Optimierungsprozesses entpuppt: Wird das Ausgangsvermögen v_0 verdoppelt, so wird, welche Ausprägungen die Standardrisikoprojekte auch immer annehmen, zu jedem Zeitpunkt doppelt soviel konsumiert, als es sonst der Fall gewesen wäre.

Die Abb. 3 deutet an, daß ein Pfad, der irgendwo von $\varepsilon_t = 1$ abweicht, überall in die gleiche Richtung abweicht. Das ist eine allgemeine Regel, von der es keine Ausnahme gibt. Da ε_t fällt, wenn es größer als Eins ist und steigt, wenn es kleiner ist, ermöglicht sie es, aus der leicht beobachtbaren *Veränderung* der Risikofurcht auf ihr *Ausmaß* zu schließen. Wenn man das Modell der optimalen Lebenszyklusplanung vor Augen hat, dann ist wohl insbesondere der Fall einer mit fortschreitender Zeit zunehmenden Risikoaversion realistisch und es folgt, daß die Weber-Funktion $U(v) = (1 - \varepsilon)v^{1 - \varepsilon}$, $\varepsilon < 1$, den *Standardtypus* darstellt.

Diese Erkenntnis bestätigt, was wir im Kapitel III B bereits aus ganz anderen Gründen vermutet hatten. Dort hatte sich ja gezeigt, daß die

Weber-Funktionen nur bei $\varepsilon < 1$ unten beschränkt sind, so daß nach der Maehkminn-Regel ein Risikovorliebe anzeigender konvexer Bereich der abgeleiteten Nutzenfunktionen für juristische Verteilungen entsteht. Und allein dieser konvexe Bereich schien uns mit der allgemein geringen Bereitschaft zur freiwilligen Versicherung von Haftpflichtrisiken vereinbar zu sein.

Daß, wie in der Abb. 3, die Zeitpfade des Risikoaversionsmaßes ε linear sind, ist nicht allgemein richtig, sondern nur, wenn keine Minderschätzung zukünftiger Bedürfnisse im Sinne des ersten Zinsgrundes von Böhm-Bawerks vorliegt (und natürlich auch keine Überschätzung). Wie eine vergrößerte Gegenwartsvorliebe auf die Zeitpfade von ε wirkt, läßt sich leicht feststellen. Nach allgemeinem Verständnis liegt eine vergrößerte Gegenwartsvorliebe jedenfalls dann vor, wenn sich für alle $t=1, \dots, T$ $(\sum_{i=t}^T \lambda_i) / (\sum_{i=0}^{t-1} \lambda_i)$, damit auch $(\sum_{i=t}^T \lambda_i) / (\sum_{i=0}^{t-1} \lambda_i + \sum_{i=t}^T \lambda_i)$ und wegen $\sum_{i=0}^T \lambda_i = 1$ schließlich $\sum_{i=t}^T \lambda_i$ verkleinert hat. Nach (45) folgt hieraus unmittelbar, daß $\varepsilon_t = 1 - (1 - \varepsilon') \sum_{i=t}^T \lambda_i$ für alle $t=1, \dots, T$, näher an den mittleren Wert $\varepsilon = 1$ heranrückt, wenn der Ursprung des Pfades mit $\varepsilon_0 = \varepsilon'$ erhalten bleibt. So kann man schließen, daß von zwei Menschen mit gleicher Risikofurcht in der Jugend, der mit der höheren Zeitpräferenzrate im Alter dem Mittelmaß $\varepsilon = 1$ näher ist, und daß von zweien, die im Alter die gleiche Risikofurcht zeigen, derjenige mit der höheren Zeitpräferenzrate die stärkere Neigung zu Extremen bewies, als er noch jung war.

Man könnte geneigt sein, das Ergebnis der Zeitabhängigkeit der Risikoaversion mit dem Hinweis auf die in der Praxis beobachtbare „rollende Planung“ zu bezweifeln. Wenn nämlich mit fortschreitender Zeit der Planungshorizont laufend hinausgeschoben und von Periode zu Periode ein neuer Optimierungsansatz bis zum jeweils neuen Planungshorizont erstellt wird, um das aktuelle Verhalten zu bestimmen, dann bleibt die Risikofurcht zeitinvariant³². Ein solches Vorgehen ist aber in der Regel irrational, denn man optimiert dabei die jeweils aktuelle Entscheidung unter der Voraussetzung einer künftigen Verhaltensstrategie, die man in Wahrheit gar nicht befolgt. Die Verschiebung des Planungshorizontes wäre nur dann unschädlich, wenn sich, aus welchen Gründen auch immer, ohnehin kein Einfluß auf die aktuelle Entscheidung ergäbe. Vermutlich liegt gerade diese Situation bei den in der Praxis beobachtbaren Fällen einer rollenden Planung vor, denn sollte es wirklich glaubhaft sein, daß Unternehmen eine rollende Fünfjahres-

³² ROSENSTEIN-RODAN (1934, S. 78–84) ist der Meinung, daß sich der Zeithorizont laufend verschieben müsse, weil man erst mit fortschreitender Zeit Klarheit über die konkreten Konsumwünsche gewinne. An letzterem ist sicherlich viel Wahres. Doch warum soll eine Planung bis zum endgültigen Horizont nicht auch dann sinnvoll sein, wenn man sich über die Struktur zukünftiger Konsumgüterbündel noch nicht im klaren ist und statt dessen, wie in dieser Arbeit unterstellt, seine Überlegungen nur auf den für Konsumzwecke vorgesehenen Geldwertstrom konzentriert?

planung praktizieren, wenn eine rollende Sechsjahresplanung zu merklich anderen aktuellen Entscheidungen führen würde?

Es ist jetzt zu überlegen, wie die Zeitabhängigkeit der Risikoaversion und damit zusammenhängend der Einfluß der Zeitpräferenz zu interpretieren ist. SAMUELSON (1969) hat zu Beginn seines Aufsatzes zu intertemporalen Planungsproblemen bei Unsicherheit die Vermutung geäußert, in der Jugend sei die Risikoaversion kleiner als im Alter, weil der junge Mensch die Möglichkeit habe, anfängliche Fehler wiedergutzumachen, und war dann erstaunt, daß sein (oben kritisierte) Ansatz eine Zeitinvarianz der Risikoaversion impliziert. Auf den ersten Blick könnte man versucht sein, unsere Ergebnisse so zu deuten, als erweise sich Samuelsons Vermutung nun doch als korrekt. Damit hätte man indes nicht die wahre Erklärung gefunden. Ganz im Gegensatz zu der Intention, die hinter dem Argument von Samuelson steht, sind die Entscheidungen in der Jugend nämlich von enormer Tragweite, da sie die Weichen für das ganze Leben stellen. Ändert sich durch eine anfängliche Entscheidung das Vermögen um $x\%$, so ändert sich wegen der auf Relationen ausgerichteten Präferenzstruktur der Menschen und wegen der stochastisch konstanten Skalenerträge auch der Konsum zu jedem Zeitpunkt in dem gesamten noch bevorstehenden Leben um eben diesen Prozentsatz. Eine entsprechende prozentuale Vermögensänderung im Alter hätte statt dessen nur auf wenige Jahre Einfluß und der gesamte Lebensnutzen würde nur geringfügig berührt. Bedenkt man, daß wir mit der Funktion $\Psi(\Sigma)$ auf den Lebensnutzen eine spezifische Risikoaversionsfunktion angewendet haben, so ist klar, daß die Wölbung dieser Funktion für Entscheidungen im Alter, die ja nur die Wahl zwischen Verteilungen mit geringfügigen Streuungen des Lebensnutzens verlangen, kaum zum Zuge kommt, und insofern angenähert nach einem Mittelwertkriterium auf dem subjektiven Kontinuum entschieden werden kann. Dieses Mittelwertkriterium lautet $\max E(\ln Q_t)$ und erklärt, weshalb man im Alter mehr zu einem Risikoaversionsmaß von $\varepsilon=1$ tendiert. Wenn jedoch in jungen Jahren zwischen Verteilungen mit beträchtlicher Streuung des Lebensnutzens zu wählen ist, dann ist die Entscheidung nach dem Mittelwertkriterium nicht mehr gerechtfertigt. Statt dessen kommen Risikovorliebe oder Risikofurcht auf dem subjektiven Kontinuum zum Zuge, so daß ε deutlich kleiner oder deutlich größer als 1 ist.

Im Lichte dieser Interpretation wird auch der oben abgeleitete Einfluß der Zeitpräferenz verständlich: Wenn der ohnehin geringe Einfluß, den Entscheidungen im Alter auf den Lebensnutzen noch haben, durch eine höhere Gegenwartsvorliebe zusätzlich zurückgedrängt wird, dann verstärkt sich der Grund, bei solchen Entscheidungen Risikoneutralität auf dem subjektiven Kontinuum obwalten zu lassen, wenn man die Risikoneigung in jungen Jahren als gegeben annimmt. Geht man jedoch von einer festen Risikoneigung im Alter aus, dann verschafft die verstärkte Gegenwartsvorliebe der

ohnehin großen Auswirkung, die eine Entscheidung in jungen Jahren auf den Lebensnutzen hat, noch mehr Gewicht, so daß Risikoaversion oder Risikovorliebe auf dem subjektiven Kontinuum *a fortiori* nicht vernachlässigbar sind.

2.3.3. Das optimale Konsumverhalten

Wir wollen nun die Eigenschaften des mit (44) festgelegten Konsumverhaltens (oder im Unternehmensmodell: der Ausschüttungspolitik) studieren. Es zeigt sich, daß die Konsumquote zum Entscheidungszeitpunkt um so kleiner ist, je mehr Gewicht dem zukünftigen Konsum ($\sum_{i=t+1}^T \lambda_i$) im Verhältnis zum gegenwärtigen Konsum (λ_t) gegeben wird; das leuchtet ja auch unmittelbar ein. Aber es gibt noch andere Eigenschaften des Konsumverhaltens, die man einmal betrachten sollte.

Wählen wir zunächst die einfache Annahme $\lambda_t = \lambda^* = \text{const.} \forall t$, dann wird (44) zu

$$(47) \quad \alpha_t^* = \frac{1}{T-t}.$$

Damit haben wir eine extrem einfache Regel für die zeitliche Verteilung des Konsums: Zu jedem Zeitpunkt t verwendet man das dann verfügbare Kapital zu gleichen Teilen für den aktuellen Konsum und für $T-t$ (fiktive) Fonds, von denen $T-t-1$ je einen späteren Periodenkonsum alimentieren und einer das Endvermögen bereitstellt. Die Regel impliziert natürlich, daß die Konsumquote im Zeitablauf ansteigt.

Als nächstes wollen wir einen etwas komplizierteren, aber vermutlich auch realistischeren Fall betrachten. Wir unterstellen, daß die in (44) auftauchenden Gewichtungsfaktoren die Form

$$(48) \quad \left. \begin{array}{l} \lambda_t \equiv \zeta_t, \quad \text{wenn } t < T, \\ \lambda_t \equiv \varkappa \zeta_t, \quad \text{wenn } t = T, \end{array} \right\} \zeta_t \equiv \frac{1}{\sum_{i=0}^{T-1} \frac{1}{(1+d)^i} + \frac{\varkappa}{(1+d)^t}}.$$

$d > 0, \quad \varkappa > 0,$

annehmen. Damit treffen wir die in dynamischen Optimierungsmodellen so beliebte Annahme einer festen subjektiven Zeitpräferenzrate d , lassen aber zu, daß dem am Planungshorizont noch verfügbaren Vermögen mit dem Gewichtungsfaktor \varkappa eine von der Diskontierungsregel abweichende Stellung gegeben werden kann. Verbinden wir (44) mit (48), dann erhalten wir durch Reihenberechnung den folgenden Ausdruck für die optimale Vermögenskonsumquote:

$$(49) \quad \alpha_t^* = \frac{1}{1 + \frac{1}{d} - \frac{1}{(1+d)^{T-t}} \left[\frac{1+d}{d} - \kappa \right]} .$$

Hiernach führt ein Fortschreiten der Zeit t nur dann zu einer Vergrößerung der Vermögenskonsumquote, wenn $\kappa < (1+d)/d$. Bei $\kappa > (1+d)/d$ ist es statt dessen genau umgekehrt. Mit fortschreitender Zeit sinkt die Vermögenskonsumquote, weil die Notwendigkeit, ein Endvermögen aufzubauen, wegen der relativ abnehmenden Diskontierung dessen, was am Planungshorizont passiert, immer dringlicher wird.

Wie es um die Endvermögensbewertung κ auch stehen mag, ihr Einfluß auf die Höhe wie auch auf die zeitliche Entwicklung der Vermögenskonsumquote ist unbedeutend, wenn der Zeithorizont noch sehr weit entfernt ist, denn bei einer unbegrenzten Ausdehnung des Zeithorizontes erhalten wir

$$(50) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \alpha_t^* = \frac{d}{1+d} .$$

Man konsumiert in diesem Fall also grob gesprochen gerade einen Anteil in Höhe der subjektiven Zeitpräferenzrate vom Vermögen.

Die Diskussion der optimalen Konsumstrategie wollen wir mit einem Blick auf eine interessante Beziehung zwischen dem Konsumverhalten und der Risikoaversion beschließen. Berechnen wir aus (45) einmal den Ausdruck

$$\frac{(1 - \varepsilon_{t+1}) - (1 - \varepsilon_t)}{(1 - \varepsilon_t)} = - \frac{1}{1 + \frac{\sum_{i=t+1}^T \lambda_i}{\lambda_t}} ,$$

dann zeigt sich beim Vergleich mit (44), daß

$$(51) \quad \alpha_t = - \frac{(1 - \varepsilon_{t+1}) - (1 - \varepsilon_t)}{1 - \varepsilon_t} .$$

So muß also die Vermögenskonsumquote mit der „Schrumpfrate“ des Abstandes zwischen dem aktuellen Ausmaß der Risikoaversion und dem Wert Eins übereinstimmen: Je geiziger der Entscheidungsträger ist, desto langsamer nähert sich seine Risikoaversion jenem Ausmaß, das eine logarithmische Nutzenfunktion kennzeichnet. Diese Regel gilt unabhängig von irgendwelchen speziellen Annahmen über den Verlauf der subjektiven Gewichtsfaktoren λ_i und sollte damit unsere Präferenzhypothese einer empirischen Überprüfung zugänglich machen.

2.4. Ergebnis: Die überraschende Einfachheit der Mehrperiodenplanung

Am Beginn unserer Überlegungen in dem nun abzuschließenden Abschnitt B 2 stand die Kritik an dem in der Literatur üblichen Zielfunktional für die Mehrperiodenplanung bei Unsicherheit, das aus dem für den deterministischen Fall entwickelten Koopmans-Funktional und einem vorgeschalteten Erwartungsoperator besteht. Wir konnten zeigen, daß bei diesem Zielfunktional Risikoaversion und Zeitpräferenz in unzulässiger Weise verquickt sind und einige einfache Rationalitätsaxiome die Einführung einer spezifischen Risikopräferenzfunktion verlangen, die die Risikoneigung des Entscheidungsträgers verändern kann, ohne gleichzeitig einen Einfluß auf sein Verhalten in einer sicheren Welt zu nehmen.

Das so begründete allgemeine Präferenzfunktional haben wir dann unter Verwendung des Weberschen und des Fechnerschen Gesetzes spezifiziert. Es zeigte sich, daß diese Gesetze zwei Typen von Präferenzfunktionalen zulassen: Ein additiv-logarithmisches Funktional und ein multiplikatives Potenzfunktional, das im Spezialfall eine Cobb-Douglas-Form annimmt.

Unter der Bedingung stochastisch konstanter Skalenerträge implizieren diese Typen extrem einfache Regeln für das auch in intertemporaler Hinsicht optimale aktuelle Verhalten. So benötigt der Entscheidungsträger keinerlei Informationen über in Zukunft zur Wahl stehende Wahrscheinlichkeitsverteilungen³³. Darüber hinaus kann er seine Entscheidung über die aktuelle Vermögenskonsumquote und das aktuell zu wählende Risikoprojekt gänzlich unabhängig voneinander vornehmen.

Da bei der Bewertung dieses Risikoprojekts eine der Weber-Funktionen zu Rate zu ziehen und zudem die Maehkminn-Regel in der gewohnten Weise anwendbar ist, wird der zuvor entwickelte einfachste Einperiodenansatz (fast³⁴) vollständig rehabilitiert. Insbesondere bleiben auch die im dritten Kapitel abgeleiteten Indifferenzkurvenverläufe im μ - σ -Diagramm erhalten. Das Eingangs des Teils B zitierte Sprichwort "You can cross the bridge when you come to it." war deshalb gar nicht so falsch.

Neben der Rehabilitation des Einperiodenansatzes hat die hier abgeleitete Klasse von Präferenzfunktionalen einige weitere erwähnenswerte Implikationen. Die wichtigste ist, daß das für die aktuelle Entscheidung relevante Maß der relativen Risikoaversion sich im Zeitablauf dem Wert Eins nähert,

³³ Er muß allerdings die Grundbedingungen des Modells (stochastisch konstante Skalenerträge, Unabhängigkeit der Risiken) kennen.

³⁴ Im Fall eines über Eins liegenden Risikoaversionsmaßes können wir freilich keinen Vergleich zwischen Verteilungen mit einer positiven Ruinwahrscheinlichkeit mehr vornehmen. Falls mindestens eine Verteilung zur Wahl steht, bei der mit Sicherheit ein völliger Vermögensverlust vermieden wird, ist diese Schwäche aber belanglos, denn in diesem Fall sind die Verteilungen mit positiver Ruinwahrscheinlichkeit ohnehin suboptimal.

welchen Wert es anfänglich auch immer hatte. Dies erlaubt den wichtigen Schluß, daß Menschen, die mit zunehmendem Alter risikoscheuer werden, insgesamt nur eine vergleichsweise mäßige Risikoaversion (nämlich eine geringere Risikoaversion als bei einer logarithmischen Nutzenfunktion) aufweisen. Ihr Verhalten wird zu einem jeden Zeitpunkt durch eine der von unten beschränkten Weber-Funktionen bestimmt, die wir im Zusammenhang mit der Maehkminn-Regel ja auch schon wegen der geringen Attraktivität von Haftpflichtversicherungen als Normalfall angesehen hatten. Eine weitere Implikation ist, daß die Höhe der Vermögenskonsumquote und die zeitliche Veränderung der Risikoaversion in gleicher Weise von der Zeitpräferenz des Entscheidungsträgers abhängen: Die Vermögenskonsumquote mißt gerade die Geschwindigkeit, mit der sich die aktuelle Risikoaversion des Entscheidungsträgers dem Ausmaß annähert, das eine logarithmische Nutzenfunktion kennzeichnet.

Die höchst erstaunliche Rehabilitation des einfachsten risikothoretischen Ansatzes bedarf einer Erklärung. Sie liegt im wesentlichen *nicht* darin, daß wir uns bemüht haben, Annahmen so zu treffen, daß man zu einfachen Lösungen gelangt. Die einzige, nicht unmittelbar plausible, aber auch nicht sonderlich restriktive Einfachheitsannahme ist die der unabhängigen Periodennutzen, die, wie es Koopmans gezeigt hat, zusammen mit anderen plausiblen Annahmen zu einem additiven Mehrperiodenzielfunktional im deterministischen Fall führt. Aber sieht man davon ab, so ließen sich alle Ergebnisse in einer gradlinigen Argumentationskette im wesentlichen aus zwingenden Rationalitätspostulaten und den Gesetzen der Psychophysik herleiten. Bei letzteren liegt die wahre Erklärung für die Einfachheit der Mehrperiodenplanung.

Erinnern wir uns: Nach dem Weberschen Gesetz werden gleiche Reizrelationen als subjektiv gleich empfunden, ein Phänomen, für das wir den *Relativcode*, in dem die Umweltsignale verschlüsselt sind, verantwortlich gemacht haben, weil dieser Relativcode vermutlich in der evolutorischen Entwicklungsgeschichte des Menschen die Sinne zwecks Einsparung kostbarer Rechenkapazitäten darauf eingestellt hat, bei der Dekodierung gleiche Reizrelationen als gleiche, einheitlich zu verarbeitende Informationen aufzufassen. Damit liegt die Parallele zu unseren Ergebnissen auf der Hand. Mit der Annahme der stochastisch konstanten Skalenerträge haben wir den *homo oeconomicus* in einer Welt agieren lassen, in der die relevanten Informationen ebenfalls in einem Relativcode formuliert sind. Kann es da Wunder nehmen, daß er sich auch hier nach einfachen Regeln zurecht findet?